빅북총서 005

빅북총서

이상구 성균관대학교 이재화 한림대학교 김경원 상명대학교

선형대수학

BigBook

선형대수학

선형대수학

이상구 · 이재화 · 김경원

BigBook

국제통상학원론

함께 만들고 함께 나누는 공유의 지식!

인류의 지식은 개인의 것이기에 앞서 문화의 유산입니다. 우리는 물려받은 지식의 토대위에 지식을 창조한 것이며 이는 다음 세대도 그러할 것입니다. 우리의 삶을 풍요롭게 하는 지식은 공기와 같이 공유되어야 하며 이를 통해 더 나은 지식창조가 가능하다고 믿습니다.

이제 지식은 상아탑을 넘어 시민사회의 참여가 필요합니다. 이는 많은 전문가들이 다양한 지식을 가지고 있으며 지식의 변화속도는 상상하기 어려울 정도로 빠르기 때문입니다. 고등교육기관과 시민들이 협력한다면 다양한 견해를 담은 새롭고 혁신적인 지식이 창조될 수 있을 것이며, 함께 나누고 공유한다면 지식은 인류의 삶에 더 큰 기여를 할 수 있을 것입니다.

우선적으로는 교육을 위한 지식들이 공유되어져야 하며 이는 모두에게 평등하게 제공되어야 합니다. 그리하여 문화적인 유산인 지식이 인종과 성별 그리고 지위와 부의 차이에 의하지 아니하고 필요로 하는 모든 사람들에게 다가가 그들에게 보다 나은 삶이 마련되어야 합니다.

고등교육기관의 지식창조 활동 결과물들도 이를 배워야 할 학생들에게 효과적으로 공유될 필요가 있으며, 우리는 이를 위한 노력을 경주할 것입니다. 이제 새롭고 수준 높은 지식을 바라는 우리 이웃들의 목마름을 채우기 위하여 작지만 먼 걸음을 시작합니다.

뜻 있는 많은 분들의 도움으로 먼 길이 외롭지 않기를 바랍니다.

공유와 협력의 교과서만들기 운동본부

머리말 I N T R O D U C T I O N

선형대수학은 다양한 분야에서 모두 이용되기 때문에 자연계와 공학전공자는 물론 인문사회계의 학생에게도 가장 중요한 수학과목의 하나로 여겨집니다. 현재는 연구가 가장 활발한 21세기 수학 분야 중의 하나입니다.

1	0	2	1	0
0	1	2	1	1
2	0	0	2	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0

우리 사회의 여러 문제를 수학적으로 표현하여 수학적인 문제로 바꾸어 놓고, 그 문제를 선형화하여 선형연립방정식으로 만든 후 이를 풀기 위해 행렬에 대한 지식과 성질을 이용하여 쉽게 해를 구하고, 그 해를 원래의 사회문제에 대한 답으로 번역해주는 것이 바로 수학의 역할 중의 하나입니다. 이 과정에서 선형적인 컴퓨터를 만들었으며 이 컴퓨터의 발전과 더불어 선형대수학의 연구와 이용이 20세기 후반부터 가히 폭발적으로 활발해졌습니다.

흥미로운 사실은 행렬을 Matrix로 정의하고 선형대수학을 실질적으로 시작한 실베스터와 케일리, 또 최초로 현대적인 계산기를 만든 배비지는 당시 유럽대륙 중심의 수학계에서 한 발 벗어난 19세기 영국의 수학자였다는 것입니다. 이후 행렬이론의 연구는 활발히 진행되고 무한차원, Tensor 등으로 확장되어 물리학의 발전에 크게 기여하였습니다. 그러나 2차 세계대전 후에 현대적인 컴퓨터의 발전과 더불어 행렬의 수치적인 장점이 부각되면서부터 유럽 중심의 수학계에서 소외받던 미국에서 20세기에 행렬이론이 크게 발전하며, 실험과학은 물론 이론과학에서도 차별화하여 21세기 현재 세계 유일의 슈퍼 파워로 성장한 사실은 우리가 주목할 만합니다.



한국은 2012년도 국제수학교육대회를 성공적으로 개최하였고, 2014년 세계수학자대회를 국내에 유치하게 되어 그에 따른 관심 고조 등으로 한국수학올림피아드 학생그룹의 실력이 크게 좋아져, 2012년에는 세계 1위를, 2013년에는 세계 2위를 기록하였습니다. 한국 학생의 수학 학력은 최근 PISA와 TIMMS 평가에서 이보다 더 높은 평가를 받고 있습니다. 한국의 대학 신입생 수학 학력은 미국은 물론 세계 어느 나라의 신입생보다 우수합니다.

모두가 쓰던 자연수에 음수를 도입한 중국의 음양설과 이어서 0을 집어넣은 인도의 공(空)사



상, 측량하며 분수를 보탠 이집트의 유리수와 지중해를 건너 그리스의 피타고라스가 무리수를 발견하고, 계속하여 유럽에서 복소수, 이어서 영국의 해밀턴이 생각해낸 4원수, 또 대서양을 건너 미국으로 가서 발전한, 컴퓨터를 이용하여 자유자재로 다루는, -차원시대를 거쳐 이제 디지털 개척시대인 21세기에 수학의 중심이 태평양을 건너 다시 시발점인 아시아로 또 한국으로 오고 있음을 믿어 의심치 않습니다. 본 교재는 여러분이 우리 선형대수학 교재를 통하여 세계를 이끌어나가는 훌륭한 리더로 성장하기를 바라고 또 기대하는 의도로 제작되었습니다. 이 책을 이용하시면서 궁금하신 부분을 발견하시면 저자에게 e-mail로 문의하시면 됩니다.

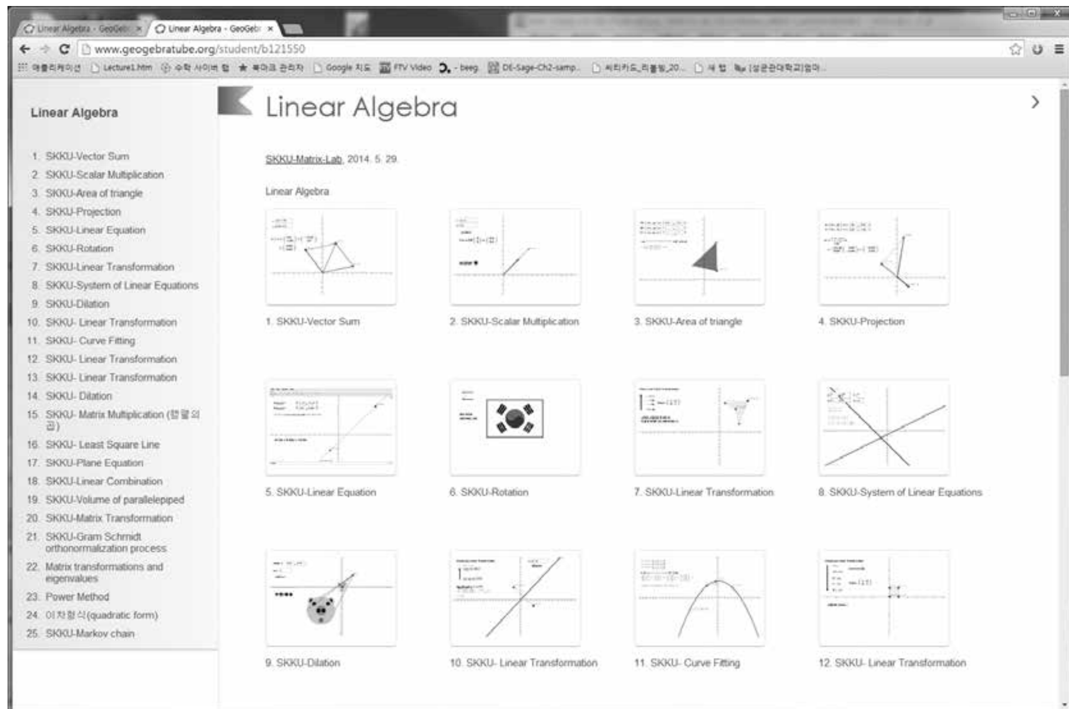
■ Goal: 선형대수학 개념의 이해와 공학적 도구(CAS)를 활용한 문제해결력을 기르고 그 과정을 과제로 제출하고, 설명할 수 있는 능력을 키우고, 그 향상된 능력에 대하여 평가한다.

▎실습 도구 활용방법 ▎ https://www.youtube.com/watch?v=VoxJvW-YjWs

〔문제와 풀이〕 http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/

〔동영상 강의〕 http://matrix.skku.ac.kr/2012-album/2012-LA-Lectures.htm

〔도서관〕 http://matrix.skku.ac.kr/2012-e-Books/index.htm



〔CAS-지오지브라〕 http://www.geogebratube.org/student/b121550





〔한국인 수학자 스마트폰 앱(App)〕 http://matrix.skku.ac.kr/K-Math-History/index.htm

https://play.google.com/store/apps/details?id=korean.mathematicians.ko

void(0); - Google 검색 × Linear Algebra - GeoGebr × Prof. Sang-Gu Lee Home × SGLee-Sage-Lab-Manual ×

matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-2.htm

애플리케이션 Lecture1.htm 수학 사이버 랩 북마크 관리자 Google 지도 FTV Video - beeg. DE-Sage-Ch2-samp... 씨티카드_리볼빙_20... 새 탭

Lab Manual for Linear Algebra with Sage

Prof. Sang-Gu Lee

Calculus with Sage by SKKU

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab

Chapter 1. Vectors

1. 벡터합, 스칼라배

R^4의 벡터 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\\4\end{bmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}-2\\4\\1\\0\end{bmatrix}$에 대하여 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $(-2)\mathbf{x}$를 구하여라.

```
a=vector([1, 2, -3, 4])   # 벡터 생성, 형식은 vector([성분, 성분, ..., 성분])
b=vector([-2, 4, 1, 0])
print "a=", a
print "b=", b
print
print "a+b=", a+b   # 벡터의 합
print "a-b=", a-b   # 벡터의 차
print "-2*a=", -2*a   # 벡터의 스칼라배
```

실행(Evaluate)

Language: Sage

Syntax Highlighting

〔CAS-Sage〕 http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/Sag-Ref.htm

void(0); - Google 검색 | Linear Algebra - GeoGebr | Prof. Sang-Gu Lee Home | SGLee-Sage-Lab-Manual

matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-2.htm

애플리케이션 | Lecture1.htm | 수학 사이버 랩 | 북마크 관리자 | Google 지도 | FTV Video | - beeg. | DE-Sage-Ch2-samp... | 씨티카드_리볼빙_20... | 새 탭

```
(SL1+SL2+SL3+SL4).show(aspect_ratio=1, figsize=5)
```

실행(Evaluate)

Language: Sage

Syntax Highlighting

Permalink, Shortened Temporary Link

Powered by sage

Chapter 7. Dimension and Structure

1. 일차독립

행렬식을 이용한 일차독립 판정법을 이용하여,
R^3의 세 벡터 $\mathbf{x}_1=(1,2,3)$, $\mathbf{x}_2=(-1,0,2)$, $\mathbf{x}_3=(3,1,1)$에 대하여 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$은 일차독립임을 확인하여라.

```
x1=vector([1, 2, 3])
x2=vector([-1, 0, 2])
x3=vector([3, 1, 1])
A=column_matrix([x1, x2, x3])   # x1, x2, x3를 열벡터로 하는 행렬 생성
print "A="
print A
print
print "det(A) =", A.det()   # 행렬 A의 행렬식 구하기
```

실행(Evaluate)

Language: Sage

Syntax Highlighting

따라서 $\det(A) \neq 0$ 이므로 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$은 일차독립이다.

2. 해공간

다음 동차연립방정식의 해공간을 구하여라.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

목차 CONTENTS

Chapter1 벡터(Vectors)

:: 1.1 공학과 수학에서의 벡터: n-공간
:: 1.2 내적과 직교
:: 1.3 직선과 평면의 벡터방정식
:: 연습문제

Chapter2 선형연립방정식

:: 2.1 선형연립방정식
:: 2.2 Gauss 소거법과 Gauss-Jordan 소거법
:: 연습문제

Chapter3 행렬과 행렬대수

:: 3.1 행렬연산
:: 3.2 역행렬
:: 3.3 기본행렬
:: 3.4 부분공간과 일차독립
:: 3.5 선형연립방정식의 해집합과 행렬
:: 3.6 특수행렬들(Special matrices)
:: 연습문제

| Chapter4 | 행렬식

:: 4.1 행렬식의 정의와 기본정리
:: 4.2 여인자 전개와 행렬식의 응용
:: 4.3 크래머 공식
:: 4.4 행렬식의 응용
:: 4.5 고유값과 고유벡터

| Chapter5 | 행렬모델

:: 5.1 Blackout Game
:: 5.2 Sage를 활용한 선형모델
:: 5.3 퀴즈 및 중간고사 예시
:: http://matrix.skku.ac.kr/2014-Album/MC.html
http://matrix.skku.ac.kr/CLA-Exams-Sol.pdf

| Chapter6 | 선형변환

:: 6.1 함수(변환)로서의 행렬
:: 6.2 선형변환의 기하학적 의미
:: 6.3 핵과 치역
:: 6.4 선형변환의 합성과 가역성
:: 6.5 Sage를 활용한 컴퓨터 그래픽
:: 연습문제

| Chapter7 | 차원과 부분공간

:: 7.1 기저와 차원의 성질
:: 7.2 행렬이 갖는 기본공간들
:: 7.3 차원정리(Rank-Nullity 정리)
:: 7.4 Rank 정리
:: 7.5 정사영(Projection) 정리
:: 7.6 최소제곱해(least square solution)
:: 7.7 Gram-Schmidt의 정규직교화과정
:: 7.8 QR-분해; Householder transformations
:: 7.9 좌표벡터
:: 연습문제

| Chapter8 | 행렬의 대각화

:: 8.1 선형변환의 행렬표현
:: 8.2 닮음과 행렬의 대각화
:: 8.3 직교대각화, *행렬 함수
:: 8.4 이차형식
:: 8.5 이차형식의 응용
:: 8.6 SVD와 일반화된 역행렬
:: 8.7 복소고유값과 고유벡터
:: 8.8 Hermitian, 유니타리, 정규행렬
:: 8.9 선형연립미분방정식
:: 연습문제

| Chapter9 | 일반벡터공간

:: 9.1 벡터공간의 공리
:: 9.2 내적공간; *푸리에 급수
:: 9.3 동형사상(Isomorphism)
:: 연습문제

| Chapter10 | Jordan 표준형(with Sage)

:: 10.1 점도표를 이용한 Jordan 표준형 구하기
:: 10.2 Jordan 표준형과 일반화된 고유벡터
:: 10.3 Jordan 표준형과 컴퓨터 활용
:: 연습문제

★ 부록(Appendix)

Chapter 1

벡터(Vectors)

1.1 공학과 수학에서의 벡터: n-공간
1.2 내적과 직교
1.3 직선과 평면의 벡터방정식
연습문제

선형대수학은 수학, 공학, 경제학, 사회학 등 거의 모든 학문 분야에서 이용되며, 가장 중요한 수학과목의 하나로, 현재 실제 응용뿐만 아니라 이론적인 연구도 매우 활발한 수학 분야 중의 하나랍니다.
우리는 그 첫 걸음으로 벡터와 그 성질을 공부하고 이를 바탕으로 선형대수학의 기본 원리들을 하나하나 공부해 갈 것입니다.
크기와 방향 모두를 가지는 것(object, 양)을 벡터(vector)라 합니다. −차원벡터는 유전학이나 경제학, 생태학 등 다양한 분야에서도 볼 수 있답니다. 우리는 우선 3차원 공간에서 이러한 벡터들이 갖는 기본 성질을 알아보고, 그 내용을 −차원공간으로 확장할 것입니다. 또한 내적(dot product, inner product)을 정의하고 직선과 평면의 방정식을 공부할 것입니다.

선형대수학

1.1 *공학과 수학에서의 벡터: n-공간

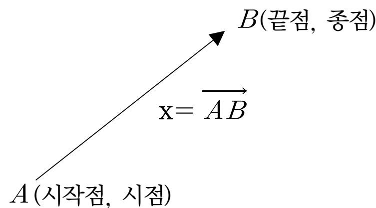
- 참고 동영상: http://youtu.be/CbfJYPCkbm8 http://youtu.be/85kGK6bJLns
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-1-Sec-1-1.html

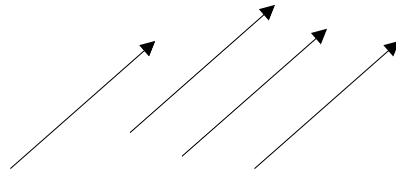


우리들이 일상적으로 사용하는 물리적인 양 중에는 길이, 넓이, 질량, 온도와 같이 그 양의 크기만 주어지면 완전히 표시되는 스칼라(scalar)와 힘, 속도, 위치 이동과 같이 크기뿐만 아니라 방향까지 지정하지 않으면 완전히 표현할 수 없는 벡터(vector)가 있다.

- 스칼라(scalar): 길이, 넓이, 질량, 온도 – 크기만 주어지만 완전히 표시되는 양
- 벡터(vector): 속도, 위치이동, 힘 – 크기뿐만 아니라 방향까지 지정하지 않으면 완전히 표현할 수 없는 양

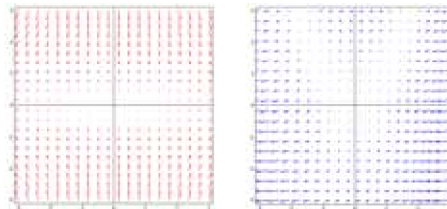
- 벡터는 크기와 방향을 갖는 유향선분 – 2차원, 3차원 공간의 벡터는 **화살표**로 표현 가능





- 시작점과 끝점이 같아서 크기가 0인 벡터를 **영벡터**라 한다(영벡터는 크기가 0이므로 방향은 임의의 방향으로 한다).

- 물리학에서 벡터는 운동법칙은 물론이고 속도와 가속도, 힘 등을 나타내는 데 유용하게 쓰이고 있다. 물리학에서 벡터들의 모임은 바로 힘의 구성을 나타내고, 물리학적 힘의 구성은 전자기장 등 다양한 벡터들로 이루어진 공간을 나타내는 데 효과적으로 쓰인다. 사회과학에서도 널리 쓰인다.



- 앞으로 7장까지는 특별한 언급이 없는 한 스칼라는 실수로 제한한다. k가 스칼라이면 $k \in R$

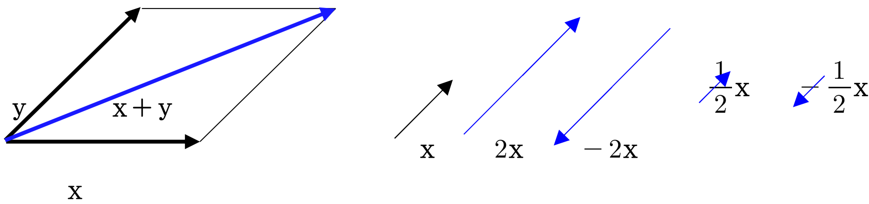
을 의미한다.

정의 [벡터의 덧셈과 스칼라배]

두 벡터 x, y와 스칼라 k에 대하여 두 벡터의 합 x+y와 k에 의한 x의 스칼라배 kx를 다음과 같이 정의한다.

(1) x+y는 x, y에 의하여 결정되는 평행사변형의 대각선으로 표시되는 벡터이다.

(2) kx는 $k>0$이면 x와 방향이 같으면서 길이는 k배하여 얻어지는 벡터이고, $k<0$이면 x와 방향이 반대이면서 길이는 $|k|$배하여 얻어지는 벡터이다. 또 k가 0이면 kx는 길이가 0인 벡터이다.



좌표평면 $R^2=\{(x_1,\ x_2)\,|\,x_1,\ x_2\in R\}$에서 원점을 시작점으로 하는 모든 벡터는 끝점에 의해 크기와 방향이 결정된다. 그런데 벡터는 크기와 방향이 같으면 시작점에 관계없이 항상 동일한 벡터로 간주하므로 (앞으로 원점을 항상 시작점으로 생각하기로 약속하면) 모든 벡터는 점의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.

정의

두 실수들의 순서조 $(x_1,\ x_2)$를 **(평면)벡터(vector in plane)**라 하고

$$\mathrm{x}=(x_1,\ x_2) \text{ 또는 } \mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ 로 나타낸다.}$$

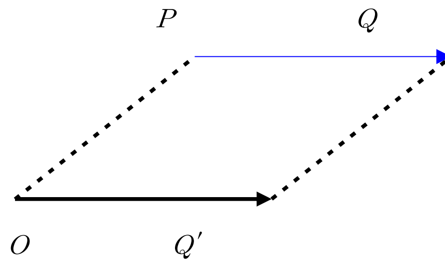
이때 실수 x_1, x_2를 **(평면)벡터 x의 성분(component)**이라고 한다.

정의 [상등]

R^2의 벡터 $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$에 대하여 $x_1=y_1$, $x_2=y_2$이면 $\mathrm{x}=\mathrm{y}$라 한다.

참고 시작점이 원점이 아닌 벡터를 다룰 경우

$P(x_1, x_2)$를 시작점, $Q(y_1, y_2)$를 끝점으로 갖는 유향선분은 다음과 같은 성분을 갖는 벡터이다. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ'}=(y_1-x_1, y_2-x_2)$



예제 1

R^2의 점 $P_1(0,-4)$, $P_2(-3,1)$, $Q(2,3)$, $Q_1(2,-1)$, $Q_2(-1,4)$에 대하여 $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{P_1Q_1}$, $\overrightarrow{P_2Q_2}$를 성분으로 표시하라.

풀이 $\overrightarrow{OQ}=(2,3)$, $\overrightarrow{P_1Q_1}=\overrightarrow{OQ_1}-\overrightarrow{OP_1}=(2,-1)-(0,-4)=(2,3)$,

$\overrightarrow{P_2Q_2}=\overrightarrow{OQ_2}-\overrightarrow{OP_2}=(-1,4)-(-3,1)=(2,3)$이므로

$\overrightarrow{P_1Q_1}$와 $\overrightarrow{P_2Q_2}$는 동일한 벡터이다. ■

정의

R^2의 벡터 $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$와 스칼라 k에 대하여 두 벡터의 합 $\mathrm{x}+\mathrm{y}$와 k에 의한 x의 스칼라배 $k\mathrm{x}$를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\text{(i)}\ \mathrm{x}+\mathrm{y}=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\ k\mathrm{x}=\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix}$$

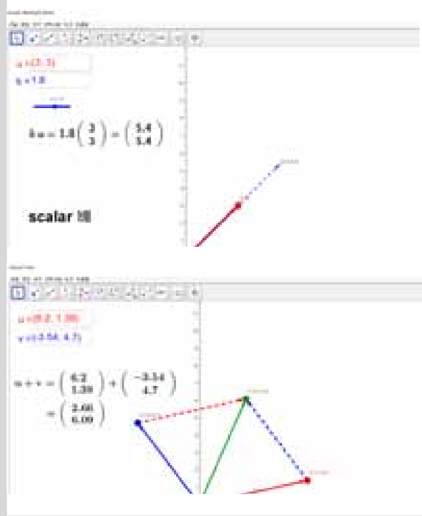
또한 R^2에서 모든 성분이 0인 벡터를 **영벡터** 또는 **원점**이라 하고 0으로 나타낸다. 그러면 임의의 벡터 $\mathrm{x}\in R$에 대하여

$$\mathrm{x}+0=\mathrm{x},\ \mathrm{x}+(-1)\mathrm{x}=0$$

가 성립함을 쉽게 알 수 있다. 여기서 $(-1)\mathrm{x}=-\mathrm{x}$로 정의하며 $-\mathrm{x}$를 x의 **음벡터**라 한다.

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[스칼라배] http://matrix.skku.ac.kr/2012-album/2.html
[벡터의합] http://matrix.skku.ac.kr/2012-album/3.html



예제 2

R^2의 벡터 $\mathrm{x}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\mathrm{y}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$에 대하여 x+y, x−y, (−2)x를 구하여라.

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/1-VT-sum-multi.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu에서 아래 명령어를 복사하여 붙이고 실습.

```
a=vector([1, 2])          # 벡터 생성, 형식은 a=vector([성분, 성분])
b=vector([-2, 4])
print "a+b=", a+b         # 벡터 더하기
print "a-b=", a-b         # 벡터 빼기
print "-2*a=", -2*a       # 벡터의 스칼라배, 곱셈기호(*)를 해야 함
```

```
a+b=(-1, 6)
a-b=(3, -2)
-2*a=(-2, -4)
```

■

- 좌표공간 $R^3=\{(x_1, x_2, x_3)\,|\,x_1, x_2, x_3\in R\}$상의 벡터

정의

세 실수들의 순서조 (x_1, x_2, x_3)를 **(공간)벡터(vector in space)**라 하고

$$\mathrm{x}=(x_1, x_2, x_3) \text{ 또는 } \mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

로 나타낸다. 이때 실수 x_1, x_2, x_3를 (공간)벡터 x의 **성분(component)**이라고 한다.

정의 [상등]

R^3의 벡터 $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$에 대하여 $x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3$이면 $\mathrm{x}=\mathrm{y}$라 한다.

참고 시작점이 원점이 아닌 벡터를 다룰 경우

$P(x_1, x_2, x_3)$를 시작점, $Q(y_1, y_2, y_3)$를 끝점으로 갖는 유향선분은 다음과 같은 성분을 갖는 벡터이다. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ'}=(y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3)$

예제 3

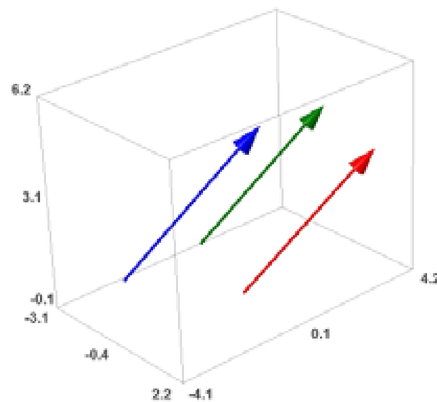
R^3의 점 $P_1(0,-4,2)$, $P_2(-3,1,0)$, $Q(2,3,4)$, $Q_1(2,-1,6)$, $Q_2(-1,4,4)$에 대하여 $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{P_1Q_1}$, $\overrightarrow{P_2Q_2}$를 성분으로 표시하라.



$\overrightarrow{OQ}=(2,3,4)$, $\overrightarrow{P_1Q_1}=\overrightarrow{OQ_1}-\overrightarrow{OP_1}=(2,-1,6)-(0,-4,2)=(2,3,4)$,

$\overrightarrow{P_2Q_2}=\overrightarrow{OQ_2}-\overrightarrow{OP_2}=(-1,4,4)-(-3,1,0)=(2,3,4)$이므로

$\overrightarrow{P_1Q_1}$와 $\overrightarrow{P_2Q_2}$는 동일한 벡터이다. ■



정의

R^3의 벡터

$$\mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ \mathrm{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

와 스칼라 k에 대하여 두 벡터의 합 $\mathrm{x}+\mathrm{y}$와 k에 의한 x의 스칼라배 $k\mathrm{x}$를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\text{(i)}\ \mathrm{x}+\mathrm{y}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{bmatrix}\qquad \text{(ii)}\ k\mathrm{x}=\begin{bmatrix}kx_1\\kx_2\\kx_3\end{bmatrix}$$

또한 R^3에서 모든 성분이 0인 벡터를 **영벡터** 또는 **원점**이라 하고 $\mathbf{0}$으로 나타낸다. 그러면 임의의 벡터 $\mathrm{x}\in R$에 대하여

$$\mathrm{x}+\mathbf{0}=\mathrm{x},\ \mathrm{x}+(-1)\mathrm{x}=\mathbf{0}$$

이 성립함을 쉽게 알 수 있다. 여기서 $(-1)\mathrm{x}=-\mathrm{x}$로 정의하며 $-\mathrm{x}$를 x의 **음벡터**라 한다.

- 모든 n차원 벡터 전체의 집합을 **n-공간(n차원 공간)** R^n으로 나타낸다. 즉

$$R^n=\{(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)\,|\ x_i\in R,\ i=1,2,\ \dots\ ,n\}$$

정의

n개의 실수의 순서조$(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)$을 **$n$차원 벡터($n$-dimensional vector)**라 하고

$$\mathrm{x}=(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,x_n)\ \text{또는}\ \mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

로 나타낸다. 이때 실수 $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$을 x의 **성분**이라 한다.

정의 [상등]

R^n의 벡터

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

에 대하여 $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$이면 $\mathrm{x} = \mathrm{y}$라고 한다.

정의

R^n의 벡터

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

와 스칼라 k에 대하여 두 벡터의 합 $\mathrm{x}+\mathrm{y}$와 k에 의한 x의 스칼라배 $k\mathrm{x}$를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\text{(i)} \ \mathrm{x}+\mathrm{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \ k\mathrm{x} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$

또한 R^n에서 모든 성분이 0인 벡터를 **영벡터** 또는 **원점**이라 하고 $\mathbf{0}$으로 나타낸다. 그러면 임의의 벡터 $\mathrm{x} \in R$에 대하여

$$\mathrm{x} + \mathbf{0} = \mathrm{x}, \ \mathrm{x} + (-1)\mathrm{x} = \mathbf{0}$$

이 성립함을 쉽게 알 수 있다. 여기서 $(-1)\mathrm{x} = -\mathrm{x}$로 정의하며 $-\mathrm{x}$를 x의 **음벡터**라 한다.

예제 4

R^4의 벡터 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\\4\end{bmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}-2\\4\\1\\0\end{bmatrix}$에 대하여 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $(-2)\mathbf{x}$를 구하여라.

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/1-VT-sum-multi-3.html



풀이

$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(1,2,-3,4)+(-2,4,1,0)=(-1,6,-2,4)$,
$\mathbf{x}-\mathbf{y}=(1,2,-3,4)-(-2,4,1,0)=(3,-2,-4,4)$,
$(-2)\mathbf{x}=(-2)(1,2,-3,4)=(-2,-4,6,-8)$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu에서 아래 명령어를 복사하여 붙이고 실습.

```
a=vector([1, 2, -3, 4])        # 벡터 생성, 형식은 a=vector([성분, 성분])
b=vector([-2, 4, 1, 0])        # 벡터는 행(가로)으로 생성됨
print "a+b=", a+b              # 벡터 더하기
print "a-b=", a-b              # 벡터 빼기
print "-2*a=", -2*a            # 벡터의 스칼라배, 곱셈기호(*)를 해야 함
```

```
a+b=(-1, 6, -2, 4)
a-b=(3, -2, -4, 4)
-2*a=(-2, -4, 6, -8)
```
■

정리 1.1.1

R^n의 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$와 스칼라 h, k에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$
(2) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
(3) $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}=\mathbf{0}+\mathbf{x}$
(4) $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}=(-\mathbf{x})+\mathbf{x}$
(5) $k(\mathbf{x}+\mathbf{y})=k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$
(6) $(h+k)\mathbf{x}=h\mathbf{x}+k\mathbf{x}$
(7) $(hk)\mathbf{x}=h(k\mathbf{x})$
(8) $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$

정리 1.1.2

R^n 의 벡터 x와 스칼라 k에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$
(2) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
(3) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$

정의

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$가 R^n 의 벡터이고, 계수 $c_1, c_2, \ldots, c_k$가 실수일 때,

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

인 형태를 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$의 **일차결합(linear combination)**이라 한다.

예제 5

Sage예제 http://sage.skku.edu에서 아래 명령어를 복사하여 붙이고 실습.

```
a=vector([1, 2, -3, 4])
b=vector([-2, 4, 1, 0])
c=vector([5, -2, 3, -7])
print "2*a-3*b+c=", 2*a-3*b+c                    # 일차결합
```

2*a-3*b+c=(13, -10, -6, 1) ■

1.2 *내적과 직교

- 참고 동영상: http://youtu.be/g55dfkmlTHE
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-1-Sec-1-2.html



이 절에서는 R^n상의 벡터의 크기, 거리, 사잇각 및 평행성과 직교(orthogonality)에 대해 학습한다.

정의

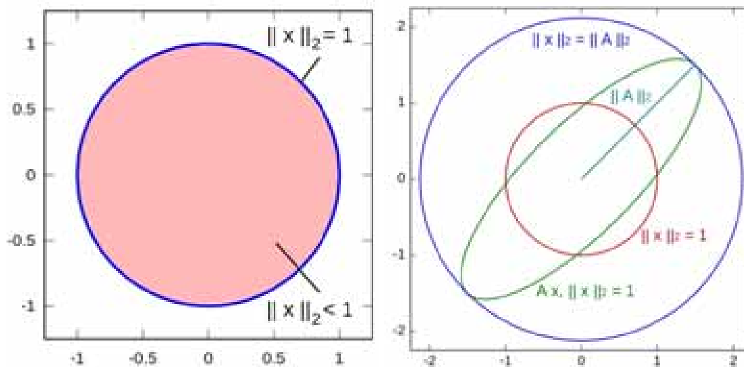
R^n의 벡터 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$에 대하여

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

을 $\mathbf{x}$의 **노름(norm, length, magnitude)**이라 한다.

위의 정의에서 $\| \mathbf{x} \|$는 원점에서 점 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$에 이르는 거리로 정의됨을 의미한다. 따라서 R^n의 두 벡터 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$에 대하여 $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$는 두 점 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$와 $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 사이의 **거리**로 정의한다. 즉,

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$





예제 1 R^4 의 벡터 x= $(2, -1, 3, 2)$, y= $(3, 2, 1, -4)$에 대하여 다음이 성립한다.

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/1-B1-norm-distance.html





풀이

$$\| \mathrm{x} \| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2+2^2} = \sqrt{4+1+9+4} = 3\sqrt{2}$$

$$\| \mathrm{y} \| = \sqrt{3^2+2^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{9+4+1+16} = \sqrt{30}$$

$$\| \mathrm{x}-\mathrm{y} \| = \sqrt{(2-3)^2+(-1-2)^2+(3-1)^2+(2-(-4))^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

□

Sage풀이 http://sage.skku.edu에서 아래 명령어를 복사하여 붙이고 실습.

```
a=vector([2, -1, 3, 2])
b=vector([3, 2, 1, -4])
print a.norm()              # 노름 계산, 형식은 a.norm()
print b.norm()              # 노름 계산
print (a-b).norm()           # 거리 계산
```

```
3*sqrt(2)                 # sqrt(2) 는 √2 를 의미한다.
sqrt(30)
5*sqrt(2)
```

■

정의

R^n 의 벡터 x= $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, y= $(y_1, y_2, \dots, y_n)$에 대하여 실수

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

을 x와 y의 **내적**(Euclidean inner product, dot product)이라 하고 x • y로 나타낸다. 즉

$$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$

예제 2

예제 1의 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$에 대하여 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$를 구하여라.



$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = 6 - 2 + 3 - 8 = -1$$

□

Sage풀이 http://sage.skku.edu에서 아래 명령어를 복사하여 붙이고 실습.

```
a=vector([2, -1, 3, 2])
b=vector([3, 2, 1, -4])
print a.inner_product(b)          # 내적 계산, 형식은 a.inner_product(b)
```

```
-1
```

■

정리 1.2.1

R^n의 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$와 스칼라 k에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

(3) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

(4) $(k\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (k\mathbf{y}) = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

정리 1.2.2 [코시 - 슈바르츠 부등식]

R^n의 임의의 벡터 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

단, 등호는 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 중 하나가 다른 것의 실수배일 때만 성립한다.

정의

R^n 의 벡터 x , y에 대하여

$$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \|\mathrm{x}\| \, \|\mathrm{y}\| \cos\theta, \ 0 \le \theta \le \pi$$

인 θ를 x 와 y가 이루는 **각(angle, 사잇각)**이라 한다.

참고 직교와 평행

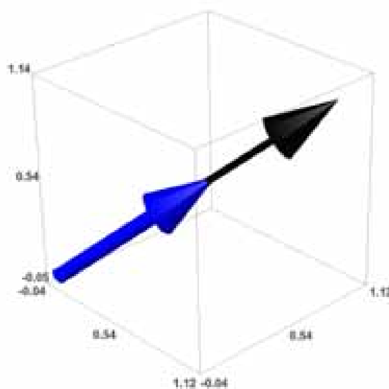
x • y= 0일 때 x 와 y는 서로 직교한다.
적당한 실수 k에 대하여 x= ky인 경우에 x 는 y와 평행하다.

정의

R^n 의 벡터 x 에 대하여 그 노름이 1인 벡터, 즉

$$\|\mathrm{x}\| = 1$$

인 벡터를 **단위벡터(unit vector)**라 한다. 또한 R^n 의 벡터 x , y가 서로 직교한다면, 이 벡터들은 직교(orthogonal)벡터들이라고 하고, x , y가 서로 직교벡터이면서 각각 단위벡터이면 **정규직교(orthonormal)벡터**들이라고 한다.



예제 3

R^4의 두 벡터 x= $(1,0,1,1)$, y= $(-1,0,0,1)$는 서로 직교함을 보여라.

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/1-TF-inner-product.html



풀이

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu에서 아래 명령어를 복사하여 붙이고 실습.

```
a=vector([1, 0, 1, 1])
b=vector([-1, 0, 0, 1])
print a.inner_product(b)
```

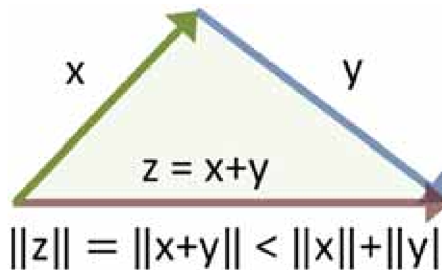
0 # 직교한다. ■

정리 1.2.3 [벡터에 대한 삼각부등식]

R^n의 벡터 x , y에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$$

단, 등호는 x , y 중 하나가 다른 것의 $k \geq 0$배일 때만 성립한다.





예제 4

예제 1 에 있는 벡터 x , y에 대하여 삼각부등식이 성립함을 확인하라.

풀이

$\mathbf{x}=(2,-1,3,2)$, $\mathbf{y}=(3,2,1,-4)$ 이므로

$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{4+1+9+4}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$,

$\|\mathbf{y}\|=\sqrt{9+4+1+16}=\sqrt{30}$ 이고,

$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(2,-1,3,2)+(3,2,1,-4)=(5,1,4,-2)$ 에서

$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|=\sqrt{25+1+16+4}=\sqrt{46}$ 이다.

따라서 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|=\sqrt{46}<\sqrt{18}+\sqrt{30}=\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ ■

정의

임의의 벡터 $\mathbf{x}\,(\neq 0)$에 대하여

$$\mathbf{u}=\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$$

는 단위벡터이다. R^n의 단위벡터 중에서 다음 n개의 벡터

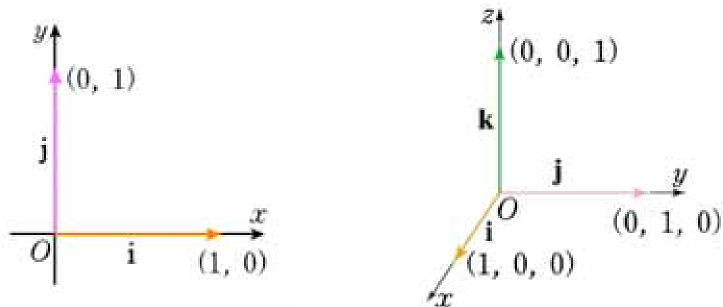
$$\mathbf{e}_1=(1,0,0,\ldots,0),\ \mathbf{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n=(0,0,0,\ldots,1)$$

을 **기본단위벡터(standard unit vector, 표준단위벡터)**라 한다.

- $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$을 R^n의 임의의 벡터라 할 때 기본단위벡터를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$$

- R^2와 R^3에서는 관습적으로 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 대신에 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$를 사용하기도 한다.



$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j},\quad \mathbf{x}=(x_1, x_2)\in R^2$$
$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k},\quad \mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)\in R^3$$

<From 이상구, 현대선형대수학(3판), ISBN 978-89-6105-195-8,경문사(2009)>

1.3 직선과 평면의 벡터방정식

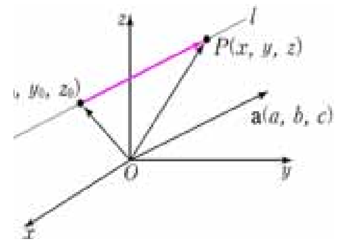
● 참고 동영상: http://youtu.be/YB976T1w0kE
● 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-1-Sec-1-3.html



이 절에서는 벡터를 이용하여 R^3에서의 직선의 방정식과 평면의 방정식을 구하고 이와 관련된 거리문제를 알아본다.

직선의 방정식: 기울기(방향벡터)와 한 점

R^3에서 한 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$를 지나고 0 아닌 벡터 $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$에 평행한 직선은 벡터 $\mathbf{a}$와 $\overrightarrow{P_0P}$가 평행, 즉, $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{a}$, $(t \in R)$를 만족하는 점 $P(x, y, z)$ 전체의 집합과 같다.



● **벡터방정식**: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{a}$, $(\mathbf{p} = \overrightarrow{OP},\ \mathbf{p}_0 = \overrightarrow{OP_0})$

● **매개방정식**: $x = x_0 + ta,\ y = y_0 + tb,\ z = z_0 + tc,$
$(-\infty < t < \infty)$

● **대칭방정식**: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}\ (= t),\ (a,\ b,\ c \neq 0)$

예제 1 점 $P(2, -1, 3)$을 지나고 벡터 $\mathbf{a} = (-3, 2, 4)$에 평행한 직선의 방정식은 다음 세 가지로 나타낼 수 있다.

풀이

(1) $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \quad (-\infty < t < \infty) \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

(2) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k} + (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})t$

(3) $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ ■

예제 2 두 점 $P(-1,2,4)$, $Q(2,0,-1)$을 지나는 직선의 매개변수방정식을 구하여라.

풀이

직선의 방정식을 구하기 위해서는 구하고자 하는 직선에 평행한 벡터와 그 직선을 지나는 한 점만 있으면 된다. 따라서 구하고자 하는 직선은 벡터

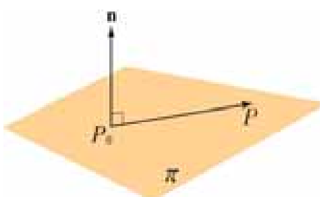
$$\mathrm{a} = \overrightarrow{PQ} = (3,\ -2,\ -5)$$

와 평행하고 점 P를 지나므로 직선의 매개변수방정식은 다음과 같다.

$$x = -1+3t,\quad y = 2-2t,\quad z = 4-5t \qquad (-\infty < t < \infty)$$

■

평면의 방정식: 법선벡터와 한 점



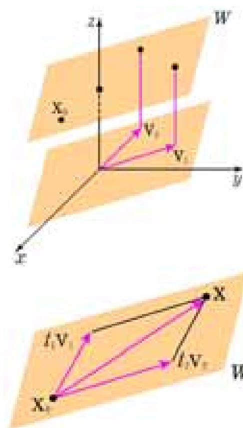
R^3에서 한 점 $P_0(x_0,y_0,z_0)$를 지나고 0 아닌 벡터 $\mathrm{n}=(A,B,C)$(법선벡터, normal vector)에 수직인 벡터들이 이루는 평면 π 는

$$\mathrm{n}\bullet\overrightarrow{P_0P}=(A,B,C)\bullet(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

을 만족하는 점 $P(x,y,z)$ 전체의 집합과 같다.

(point-normal 방정식)

일반적인 평면의 방정식



- **벡터방정식**: 평면 W 위의 한 점 x_0와 W와 평행하지만 서로 상수배가 아닌 두 벡터 v_1과 v_2가 있다면, 이 평면 W를 벡터방정식 또는 매개방정식으로 유일하게 표현할 수 있다.

$$\mathrm{x}=\mathrm{x}_0+t_1\mathrm{v}_1+t_2\mathrm{v}_2,\ (-\infty<t_1,\ t_2<\infty)$$

- **매개방정식**: $\mathrm{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\mathrm{v}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\mathrm{v}_2=(a_2,b_2,c_2)$

$x=x_0+a_1t_1+a_2t_2,\ y=y_0+b_1t_1+b_2t_2,\ z=z_0+c_1t_1+c_2t_2$

예제 3 세 점 $P(4,-3,1)$, $Q(6,-4,7)$, $R(1,2,2)$을 지나는 평면의 벡터방정식과 매개방정식을 구하여라.

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/1-BN-11.html





$\mathrm{x} = (x,\ y,\ z)$, $\mathrm{x}_0 = (4,\ -3,\ 1)$, $\mathrm{x}_1 = (6,\ -4,\ 7)$, $\mathrm{x}_2 = (1,\ 2,\ 2)$라 놓으면,
$\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0 = \overrightarrow{PQ} = (2,\ -1,\ 6)$, $\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0 = \overrightarrow{PR} = (-3,\ 5,\ 1)$.

그러면 $\mathrm{x} - \mathrm{x}_0$는 위의 두 벡터의 일차결합으로 표시되므로

$$\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 = t_1(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0) + t_2(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0)\text{이다.}$$

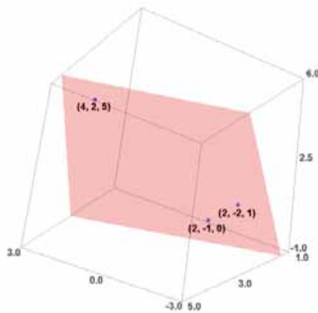
$\therefore\ (x,\ y,\ z) = \mathrm{x}_0 + t_1(2,\ -1,\ 6) + t_2(-3,\ 5,\ 1)$ # 벡터방정식
$= (4 + 2t_1 - 3t_2,\ -3 - t_1 + 5t_2,\ 1 + 6t_1 + t_2)$ # 매개방정식

평면의 매개방정식은 $x = 4 + 2t_1 - 3t_2$, $y = -3 - t_1 + 5t_2$, $z = 1 + 6t_1 + t_2$ 이다. ■

참고 컴퓨터 시뮬레이션(세 점을 지나는 평면의 방정식)

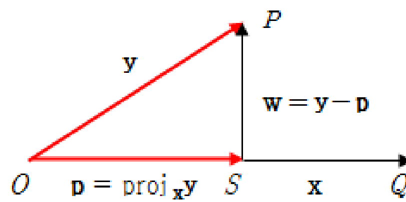
- http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/1/vec8.html

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & P_1 & Q_1 & R_1 \\ 1 & P_2 & Q_2 & R_2 \\ 1 & P_3 & Q_3 & R_3 \end{pmatrix} = 0$$
$\Rightarrow -8x + 2y + 2z + 18 = 0$



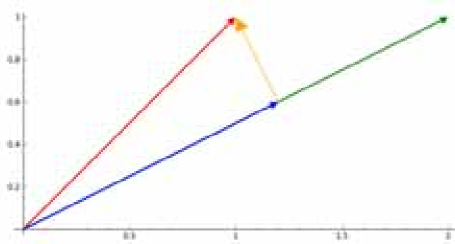
정사영

- 벡터 x= $\overrightarrow{OQ}$와 y= $\overrightarrow{OP}$가 R^3에 있고, x$\neq$0라 하자. 그러면 점 P에서 OQ에 내린 수선의 발을 S라 할 때, 벡터 p= $\overrightarrow{OS}$를 x 위로의 y의 **정사영**(projection)이라 하고 $\text{proj}_{\mathrm{x}}\mathrm{y}$로 나타낸다. 이때 벡터 w= $\overrightarrow{SP}$를 <u>x에 수직인 y의 벡터성분</u>(vector component)이라 한다. 따라서 y는 두 벡터의 합 y = p + w로 나타내진다.



참고 컴퓨터 시뮬레이션(정사영)

- http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/1/vec3.html



정리 1.3.1 [정사영]

R^3의 벡터 x ($\neq$ 0), y에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\text{proj}_{\mathrm{x}}\mathrm{y} = t\mathrm{x} = \dfrac{(\mathrm{y} \cdot \mathrm{x})}{\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}}\mathrm{x}$

(2) $D = \|\text{proj}_{\mathrm{x}}\mathrm{y}\| = \dfrac{|\mathrm{y} \cdot \mathrm{x}|}{\|\mathrm{x}\|}$

예제 4 $\mathbf{x}=(2,-1,3)$, $\mathbf{y}=(4,-1,2)$에 대하여 $\mathbf{x}$ 위로의 $\mathbf{y}$의 정사영 $\text{proj}_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$와 $\mathbf{x}$에 수직인 $\mathbf{y}$의 벡터성분 $\mathbf{w}$를 구하여라.

풀이

$\mathbf{y}\cdot\mathbf{x} = 15$이므로

$$\text{proj}_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \frac{(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x} = \frac{15}{14}(2,-1,3) = \left(\frac{15}{7}, -\frac{15}{14}, \frac{45}{14}\right)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{y} - \text{proj}_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = (4,-1,2) - \left(\frac{15}{7}, -\frac{15}{14}, \frac{45}{14}\right) = \left(\frac{13}{7}, \frac{1}{14}, -\frac{17}{14}\right)$$

□

Sage풀이 http://sage.skku.edu에서 아래 명령어를 복사하여 붙이고 실습.

```
a=vector([2, −1, 3])
b=vector([4, −1, 2])
ab=a.inner_product(b)
aa=a.inner_product(a)
p=ab/aa*a;w=b−p
print "p=", p
print "w=", w
```

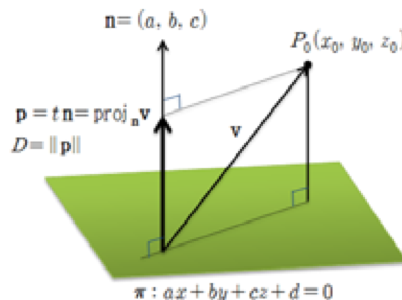
```
p= (15/7, −15/14, 45/14)
w= (13/7, 1/14, −17/14)
```

■

정리 1.3.2 [점과 평면 사이의 거리]

점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$와 평면 $\pi : ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리 D는 다음과 같다.

$$D = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



예제 5 점 $P(3,\ -1,\ 2)$에서 평면 $x+3y-2z-6=0$에 이르는 거리 D를 구하여라.

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/1-B1-point-plane-distance.html





풀이

$\mathbf{p} = \text{proj}_{\mathbf{n}}\mathbf{v} = t\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$ 이고,

여기서 $\mathbf{n}=(1,\ 3,\ -2)$, $\mathbf{v}=(3,\ -1,\ 2)$, $d=-6$이므로,

$$D = \|\mathbf{p}\| = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}\mathbf{v}\| = \frac{|3+3(-1)-2(2)-6|}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{2}{7}\sqrt{14}$$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu에서 아래 명령어를 복사하여 붙이고 실습.

```
n=vector([1, 3, -2])
v=vector([3, -1, 2]);d=-6
vn=v.inner_product(n)
nn=n.norm()
Dist=abs(vn+d)/nn
print Dist
```

5/7*sqrt(14) # $\dfrac{10}{\sqrt{14}} = \dfrac{2}{7}\sqrt{14}$ ■



[2014 서울 세계수학자대회] http://www.icm2014.org/kr

Chapter 1 연습문제

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm

문제 1 다음의 주어진 두 점 P_1과 P_2에 의해 정의되는 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$를 구하여라.
$P_1 = (5, -2, 1)$, $P_2 = (2, 4, 2)$

문제 2 끝점이 $B(-1, -1, 2)$인 벡터 $\mathbf{x} = (1, 1, 3)$의 시작점은?

문제 3 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$를 다음과 같이 정의했을 때 다음의 벡터를 구하여라.
$\mathbf{u} = (-3, 1, 2, 4, 4)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8, 1, 2)$, $\mathbf{w} = (6, -1, -4, 3, -5)$

$(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

문제 4 위에서와 같이 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$가 주어졌을 때 다음 식을 만족하는 벡터 $\mathbf{x}$를 구하여라.
$2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$

문제 5 두 벡터 $\mathbf{x} = (-1, -2, 3)$, $\mathbf{y} = (3, -2, -1)$ 사이의 각을 θ라 할 때, $\cos\theta$를 구하여라.

문제 6 두 점 $P(-1, 2, 1)$, $Q(-3, -4, 5)$ 사이의 거리를 구하여라.

문제 7 $\mathbf{x}=(a,\ 2,\ -1,\ a)$, $\mathbf{y}=(-a,\ -1,\ 3,\ 6)$일 때, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$을 만족하는 실수 a를 모두 구하여라.

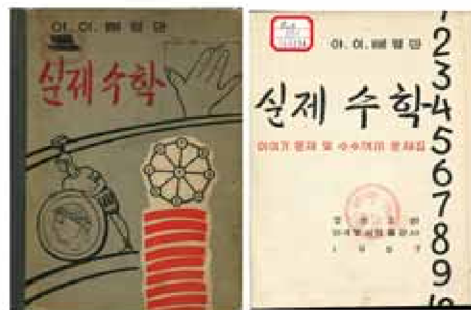
문제 8 두 점 $P(-5,\ 1,\ 3)$, $Q(2,\ -3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

문제 9 주어진 평면 $z=-7x+y+4$에 수직인 법선벡터를 찾아라.

문제 10 **[정사영]** $\mathbf{x}=(2,\ -1,\ 3)$과 $\mathbf{y}=(4,\ -1,\ 2)$일 때, $\mathbf{y}$의 $\mathbf{x}$상의 정사영 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{y}$의 $\mathbf{x}$에 수직인 벡터성분 $\mathbf{w}$를 구하여라.

문제 P1 **[토론]** 크기와 방향이 각각 같은 벡터는 벡터로서는 같은 벡터이다. 그러나 공간에서 기울기가 같은 두 개의 다른 직선은 방정식으로서는 어떤 관계인지 토론해보아라.

문제 P2 **[토론]** $\mathbf{v}_1=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$와 $\mathbf{v}_2=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$가 정규직교벡터임을 보이고 $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$가 정규직교벡터가 되는 세 번째 벡터 $\mathbf{v}_3$를 구하여라.



〈1957년 응용수학 책〉

[60년대 대학 교재 전자도서관] http://matrix.skku.ac.kr/2012-e-Books/index.htm

〈1884년~1910년 사이에 한국인 저자가 쓴 수학책〉
http://www.hpm2012.org/Proceeding/Exhibition/E2.pdf





〈이상설의 수리〉 http://matrix.skku.ac.kr/2009-Album/MathBook-SuRi_screen.html
〈이상설〉 http://matrix.skku.ac.kr/2011-Album/2011-KoreanMath-SangSeolLEE.htm





〈안종화〉 국학자, 애국계몽운동가, 현존하는 조선의 마지막 전통수학책인 「수학절요」 저술
http://scholar.ndsl.kr/schArticleDetail.do?cn=JAKO201109649109141

Chapter 2

선형연립방정식

2.1 선형연립방정식
2.2 Gauss 소거법과 Gauss-Jordan 소거법
연습문제

선형연립방정식과 그의 해를 구하는 문제는 선형대수학의 가장 중요한 문제 중 하나입니다. 수천, 수만 개의 미지수를 갖는 연립방정식은 자연과학, 공학, 경제-사회-인문학은 물론 교통문제, 일기예보, 의사결정 등 수많은 분야에서 만나게 됩니다. 더구나 속도, 가속도와 같이 도함수를 포함하는 미분방정식도 선형연립방정식 문제로 바꾸어 해결합니다.

선형대수학에서 선형연립방정식의 해는 첨가행렬을 이용한 Gauss(가우스)소거법이나 행렬식을 이용한 방법으로 구합니다. 2장에서는 선형연립방정식의 해법과 구한 해의 기하학적 의미를 고찰하고 다양한 선형연립방정식의 응용에 대하여 알아봅시다.

선형대수학

2.1 선형연립방정식

- 참고 동영상: http://youtu.be/AAUQvdjQ-qk
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-2-Sec-2-1.html



많은 미지수를 갖는 선형연립방정식은 날씨의 분석, 공학, 경제학, 교통흐름 분석, 다양한 의사결정에서 나타난다. 선형연립방정식의 연구와 해법은 선형대수학에서 가장 중요한 주제이다. 이 절에서는 어떤 문제에서 선형연립방정식 모델이 만들어지며, 그 해를 구하는 과정과 해의 기하학적 의미가 무엇인지에 대해 알아본다.

정의 [선형방정식]

미지수 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$에 관한 **선형방정식**(linear equation)은 b와 계수 $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$이 실수일 때, 다음과 같은 모양의 방정식이다.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

즉, 선형방정식은 미지수의 차수가 1인 일차식과 상수항으로 이루어진 방정식이다.

예제 1 방정식 $2x_1 - 3x_2 + 1 = x_1$, $x_2 = 2(\sqrt{5} - x_1) - x_3$은 정리하면 $x_1 - 3x_2 = -1$, $2x_1 + x_2 + x_3 = 2\sqrt{5}$와 같은 꼴로 나타낼 수 있으므로 모두 선형방정식이다. 그러나 $2x_1 - 3x_2 = x_1x_2$, $x_2 = 3\sqrt{x_1} - 1$, $x_1 + \sin x_2 = 0$는 모두 선형방정식이 아니다. ■

정의 [선형연립방정식]

일반적으로, 미지수 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$에 관한 유한 개의 선형방정식의 모임

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

을 **선형연립방정식**(system of linear equations)이라고 한다. 만일 상수항 $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$이 모두 0일 경우를 **동차선형연립방정식**(homogeneous system of linear equations, 동차선형방정식시스템)이라 한다.

정의 [선형연립방정식의 해]

선형연립방정식의 미지수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$에 어떤 수 $s_1, s_2, \ldots, s_n$을 각각 대입하였을 때, 각 방정식이 모두 성립하면 $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$을 이 선형연립방정식의 **해(solution)**라고 한다. 예를 들어, 선형연립방정식

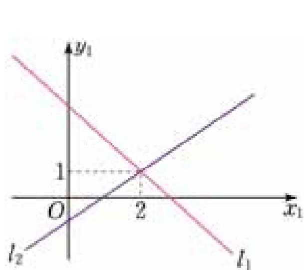
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned} \qquad (1)$$

의 x_1, x_2, x_3에 각각 $1, 2, -1$을 대입하면 두 방정식이 모두 성립하므로 $(1, 2, -1)$은 선형연립방정식 (1)의 해이다. 일반적으로 선형연립방정식의 해가 존재하는 경우를 **consistent**라 하고 반면에 해가 존재하지 않는 경우를 **inconsistent**라 한다.

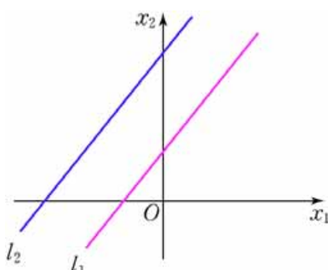
- 선형연립방정식의 해 전체의 집합을 선형연립방정식의 **해집합(solution set)**이라 하며, 동일한 해집합을 가지는 두 선형연립방정식을 **동치(equivalent)**라고 한다.

참고 해집합(미지수가 2개인 선형연립방정식)

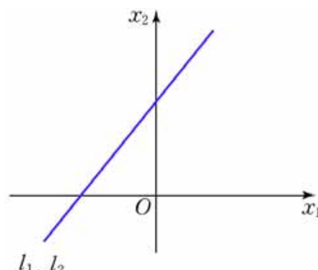
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

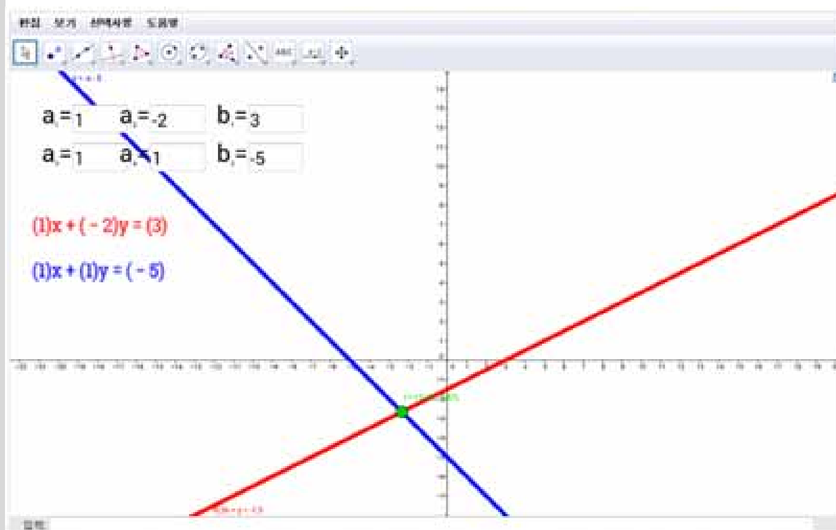


일반적으로, 주어진 선형연립방정식은 **다음 중 하나만(one and only)을 만족한다.**

(1) 유일한 해를 갖는다.
(2) 해를 갖지 않는다.
(3) 무수히 많은 해를 갖는다.

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[선형연립방정식] http://www.geogebratube.org/student/m9704



참고 선형대수학 관련 저자의 지오지브라 도구 모음 주소:



http://www.geogebratube.org/student/b121550

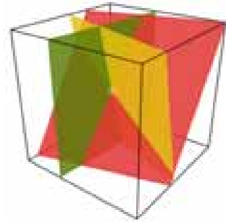
예제 2 미지수와 식의 수가 모두 3인 선형연립방정식의 R^3 안의 해집합의 모든 가능성을 서술하여라.

풀이

위의 연립방정식의 해집합은 다음의 3가지 경우 중 하나임을 기하학적으로 생각해보면 쉽게 알 수 있다. 이들 방정식이 나타내는 평면을 각각 H_1, H_2, H_3라 하자.

① 하나의 해(unique solution)를 갖는다.

오른쪽 그림과 같이 3개의 평면이 한 점에서 만나는 경우이다(유일한 해).



[예] $x+\ \ y+2z=-3$

$x+2y+3z=-4$

$x+\ \ y+3z=-6$

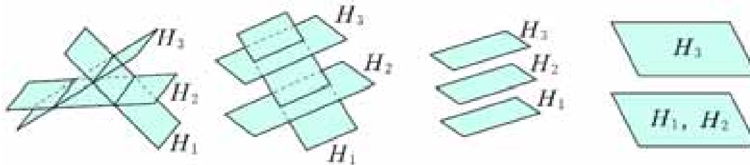
② 해를 갖지 않는다(no solution). 이 경우 주어진 연립방정식은 "inconsistent"라 한다.

[예] (1) $x+y+z=1$, $x\quad+z=1$, $y\quad=3$

(2) $x+y+z=1$, $x+y+z=2$, $2x+y+z=3$

(3) $x+y+z=1$, $x+y+z=2$, $x+y+z=3$

(4) $x+\ y+\ z=1$, $2x+2y+2z=2$, $2x+2y+2z=3$

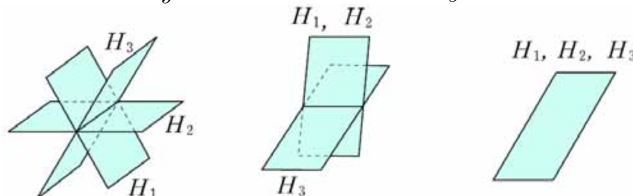


③ 무수히 많은 해(infinitely many solutions)를 갖는다.

[예] (1) $x+\ y+\ z=1$, $2x+2y+\ z=3$, $x+2y+2z=4$

(2) $x+\ y+\ z=1$, $2x+2y+2z=2$, $2x+\ y+3z=4$

(3) $x+\ y+\ z=1$, $2x+2y+2z=2$, $3x+3y+3z=3$



■

예제 3 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_4 + \ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

풀이 연립방정식의 미지수의 개수 5가 방정식의 개수 3보다 많으므로 이런 경우에는 2개의 남는 미지수에 임의의 실수를 부여하는 방법으로 푼다. 각 방정식을 정리하면

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 3x_4 &= 2x_2 + x_5 \\ x_3 - 5x_4 &= 1 - 2x_5 \\ x_4 &= 2 - x_5 \end{aligned}$$

우변의 2개의 미지수 x_2, x_5에 대하여 $x_2 = s$, $x_5 = t$ (s, t는 임의의 실수)라 놓으면

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 - x_5 = 2 - t \\ x_3 &= 1 - 2x_5 + 5x_4 = 1 - 2t + 5(2-t) = 11 - 7t \\ x_1 &= 2x_2 + x_5 - x_3 - 3x_4 = 2s + t - (11 - 7t) - 3(2 - t) \\ &= -17 + 2s + 11t \end{aligned}$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$x_1 = -17 + 2s + 11t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 11 - 7t, \quad x_4 = 2 - t, \quad x_5 = t$$

(s, t는 임의의 실수).

해집합은
$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-17 + 2s + 11t,\ s, 11 - 7t, 2 - t,\ t) \mid s, t \in R\}$이다.

■





정의 [행렬]

실수(또는 복소수)를 다음과 같이 직사각형 모양의 행과 열로 배열한 것을 행렬(matrix)이라 하며, 그 각각의 수를 행렬의 성분(entry)이라고 한다.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

행렬 A에서 $[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad \cdots \quad a_{in}]\,(1 \le i \le m)$을 A의 i**행**(i-th row of A)이라 하고,

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (1 \le j \le n)$$

을 A의 j**열**(j-th column of A)이라고 한다. 또 m개의 행과 n개의 열을 갖는 행렬 A를 **크기(size)**가 $m \times n$인 행렬이라 하며, 특히 $m=n$이면 n차의 **정사각행렬(square matrix)**이라고 한다.

● $A_{(i)}$**는 A의 i번째 행,** $A^{(j)}$**는 A의 j번째 열**로 표기하며, 따라서

$$A=\begin{bmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix} = [A^{(1)} \,|\cdots|\, A^{(n)}]$$

로 쓸 수 있다. 행렬 A의 i행, j열의 성분 a_{ij}를 A의 (i, j) 성분이라 하며, n차의 정사각행렬 A의 성분 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$을 **주대각선성분**(main diagonal entries)이라고 한다. 행렬 (2)는 (i, j) 성분을 써서 다음과 같이 간단히 나타내기도 한다.

$$A=[a_{ij}]_{m \times n} \text{ 또는 } A=[a_{ij}]$$

예제 4

다음 행렬

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad E=[2],\ F=[-1\ \ 0\ \ 3]$$

에서 A는 2×3 행렬이고, $a_{13}=-1$, $a_{22}=3$이다. 또 B는 2×2 행렬이고, $b_{11}=1$, $b_{22}=-3$ 이며 C, D, E, F는 각각 3×1, 3×3, 1×1, 1×3 행렬이다. D의 주대각선성분은 각각 $d_{11}=1$, $d_{22}=0$, $d_{33}=2$이며, E와 같은 1×1 행렬은 흔히 $E=[2]=2$로 쓴다.

■

정의 [선형연립방정식의 계수행렬과 첨가행렬]

n개의 미지수를 갖는 m개의 일차방정식으로 이루어진 선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned} \qquad (3)$$

에 대하여

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \mathrm{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

이라 하면 선형연립방정식 (3)은 행렬의 곱을 이용하여 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$A\mathrm{x}=\mathrm{b}$$

이때 행렬 A를 선형연립방정식 (3)의 **계수행렬**(coefficient matrix)이라 하며, A에 b를 붙여서 만든 행렬

$$[A\ \vdots\ \mathrm{b}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

을 선형연립방정식 (3)의 **첨가행렬**(augmented matrix)이라고 한다.

예제 5 다음 선형연립방정식을 행렬의 곱을 이용하여 나타내라. 또 선형연립방정식의 첨가행렬을 구하여라.

$$\begin{aligned} x+\ \ y+2z&=9 \\ 2x+4y-3z&=1 \\ 3x+6y-5z&=0 \end{aligned}$$

풀이 선형연립방정식의 계수행렬을 A, 미지수를 $\mathbf{x}$, 상수항을 $\mathbf{b}$라 하고,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

행렬의 곱을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

그리고 선형연립방정식의 첨가행렬은

$$[A\ \vdots\ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 2 & 4 & -3 & \vdots & 1 \\ 3 & 6 & -5 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

이다. □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(3, 3, [1,1,2,2,4,-3,3,6,-5])       # 3x3 행렬 입력
b=vector([9,1,0])                             # 상수항 벡터 입력
print A.augment(b)                          # 첨가행렬
```

```
[ 1  1  2  9]
[ 2  4 -3  1]
[ 3  6 -5  0]
```

■

2.2 Gauss 소거법과 Gauss-Jordan 소거법

- 참고 동영상: http://youtu.be/HSm69YigRr4
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-2-Sec-2-2.html



이 절에서는 선형연립방정식을 풀 때 자주 쓰던 소거법을 체계화하여 유용한 해법을 얻도록 한다. 이 방법은 주어진 선형연립방정식의 첨가행렬로부터 시작하여 사다리꼴 모양의 행렬을 만들어내는 것이다. 주어진 선형연립방정식에 소거법을 사용하여 얻어진 사다리꼴 행렬에 대응하는 선형연립방정식은 모두 동치이며, 같은 해를 갖는다는 사실을 이용한다.

- **선형연립방정식의 풀이:** 소거법

$$\begin{cases}2x+3y=1\\ x-2y=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+3y=1\\ 2x-4y=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+3y=\ \ 1\\ \quad\ \ 7y=-7\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x+3y=\ \ 1\\ \qquad\ \ y=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=\ \ 4\\ \ \ y=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\ \ 2\\ y=-1\end{cases}$$

- **위의 소거법에서 행한 연산:** 선형연립방정식의 해집합을 바꾸지 않는다.

(1) 두 식을 교환한다. $kR_i \leftrightarrow R_j$

(2) 한 식에 0 아닌 실수를 곱한다. $k\,R_i$

(3) 한 식에 0 아닌 실수배를 하여 다른 식에 더한다. $k\,R_i + R_j \rightarrow R_j$

이를 **기본행 연산(ERO, Elementary Row Operations)**이라 한다.

예제 1 아래의 왼쪽은 연립방정식을 푸는 과정이고, 오른쪽은 이에 따른 이 연립방정식의 첨가행렬의 변화를 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned} x \ + \ y+2z &= 9 \\ 2x+4y-3z &= 1 \\ 3x+6y-5z &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

첫 번째 방정식에 -2를 곱하여 두 번째 방정식에 더한다.

$$\begin{aligned} x+\ \ y+2z &= \ \ 9 \\ 2y-7z &= -17 \\ 3x+6y-5z &= \ \ 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{(-2)R_1+R_2} \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

첫 번째 방정식에 -3을 곱하여 세 번째 방정식에서 더한다.

$$\begin{aligned} x+\ y+\ 2z &= \ 9 \\ 2y-\ 7z &= -17 \\ 3y-11z &= -27 \end{aligned} \xrightarrow{(-3)R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

두 번째 방정식에 1/2을 곱하면

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ y-\frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ 3y-11z &= -27 \end{aligned} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

두 번째 방정식에 -3을 곱하여 세 번째 방정식에 더하면

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ y-\frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2} \end{aligned} \xrightarrow{(-3)R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

세 번째 방정식에 -2를 곱하면

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 \\ y-\frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \xrightarrow{(-2)R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

따라서 $z=3$

$$y=\frac{7}{2}z-\frac{17}{2}=2$$

$$x=9-y-2z=1$$

즉, 구하는 연립방정식의 해는 $x=1,\ y=2,\ z=3.$ ■



[행 사다리꼴(REF)과 기약 행 사다리꼴(RREF)]

$m\times n$ 행렬 E가 다음 성질을 만족할 때, **행 사다리꼴**(row echelon form, **REF**)이라고 한다.

(1) 성분이 모두 0인 행이 존재하면 그 행은 행렬의 맨 아래에 위치한다.

(2) 각 행에서 처음으로 나타나는 0이 아닌 성분은 1이다. 이때 이 1을 그 행의 **선행성분**(leading entry)이라고 한다.

(3) i행과 $(i+1)$행 모두에 선행성분이 존재하면 $(i+1)$행의 선행성분은 i행의 선행성분보다 오른쪽에 위치한다.

또 행렬 E가 행 사다리꼴이고 다음 성질을 만족하면 E를 **기약 행 사다리꼴**(reduced row echelon form, **RREF**)이라고 한다.

(4) 어떤 행의 선행성분을 포함하는 열의 다른 성분은 모두 0이다.

예제 2 다음 행렬은 모두 REF이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

예제 3 행렬 A, B, C는 위 정의의 성질 (1), (2), (3)을 각각 만족하지 않으므로 REF가 아니다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

예제 4 다음 행렬은 모두 RREF이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

참고

다음은 일반적인 형태의 REF와 그에 대응하는 RREF이다(여기서 *는 임의의 수를 표시).

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

정의 [기본행 연산(ERO)]

$m \times n$ 행렬 A에 관한 다음 연산을 기본행 연산(elementary row operation, ERO)이라고 한다.

E1: A의 두 행 i행과 j행을 서로 바꾼다. $R_i \leftrightarrow R_j$

E2: A의 i행에 0이 아닌 상수 k를 곱한다. kR_i

E3: A의 i행을 k배 하여 j행에 더한다. $kR_i + R_j$

- 기본행 연산은 곧 주어진 행렬을 REF와 RREF로 바꾸는 연산이다.

정의 [행동치]

행렬 A에 기본행 연산을 시행하여 얻어지는 행렬을 B라 하면 A와 B는 **행동치**(row equivalent)라고 한다.

예제 5 다음 행렬은 모두 행동치이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ■

행렬의 REF와 RREF 구하기

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ 에 대하여 기본행 연산을 적용하여 REF와 RREF를 만들자.

[단계 1]

성분이 모두는 0이 아닌 가장 좌측열을 찾는다.	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

성분이 모두는 0이 아닌 가장 좌측열
(이 경우는 첫 번째 열이다.)

[단계 2]

단계 1에서 찾은 열의 가장 위에 있는 성분이 0일 때에는 그 열의 위에서부터 처음으로 0이 아닌 성분을 포함하는 행과 1행을 교환한다. (가능하면 1, −1 또는 2 등의 성분을 취한다.)	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

1행과 2행을 교환하였다.
(이 경우는 1열의 2행성분이 대상이 된다.)

[단계 3]

1행의 선행성분을 1로 만들기 위하여 1행을 첫째 성분으로 나눈다.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

1행을 2로 나누었다.

[단계 4]

1행의 선행성분 아래에 있는 모든 성분을 0으로 만든다(행연산).	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$

1행을 −2배 하여 3행에 더했다.

[단계 5]

1행을 제외한 나머지 부분에 단계 1에서 단계 4를 반복한다.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$	우선 1행을 제외하고 성분 모두가 0이 아닌 열을 찾는다.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$	1행을 제외하고 0이 아닌 성분이 있으므로 단계 3 수행.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$	1행을 제외한 아래 성분을 모두 0으로 만든다.

[단계 6]

1행과 2행을 제외한 나머지 부분에 단계 1에서 단계 3을 반복한다.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$	1행과 2행을 제외하고 성분 모두가 0이 아닌 열을 찾는다.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	1, 2행을 제외하고 0이 아닌 성분이 있으므로 단계 3 수행.

따라서 다음과 같은 A 의 REF를 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A의 REF를 다음과 같이 변형시키면 RREF를 얻는다.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	3행에 $\frac{7}{2}$을 곱하여 2행에 계산해준다.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	역시 3행에 -6을 곱하여 1행에 계산해준다.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	2행에 5를 곱하여 1행에 계산해준다.

따라서 A의 RREF는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

예제 6 다음 행렬 A의 RREF를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 16 \\ -2 & 0 & 3 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

풀이 행렬의 크기가 3차 이상인 경우 손으로 해결하기가 까다롭다. 여기에서는 Sage를 이용하여 풀자. □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/2-MA-RREF.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(3, 5, [1,1,1,4,4,2,3,4,9,16,-2,0,3,-7,11])     # 3x5 행렬 입력
print A.rref()                                            # A의 RREF
```

```
[ 1  0  0  2 -1]
[ 0  1  0  3  2]
[ 0  0  1 -1  3]
```

■

정리 2.2.1

첨가행렬이 행동치인 두 선형연립방정식은 동치이다(즉, 해집합이 같다).

- **Gauss 소거법**: 선형연립방정식의 첨가행렬을 REF로 변형하여 푸는 방법이다.

예제 7 다음 선형연립방정식을 Gauss 소거법으로 풀어라.

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 9 \\ 2x-y+z &= 8 \\ 3x\quad\;\, -z &= 3 \end{aligned}$$

풀이 이 연립방정식의 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 9 \\ 2 & -1 & 1 & : & 8 \\ 3 & 0 & -1 & : & 3 \end{bmatrix}$이고 기본행연산을 시행하여 REF를 구하면 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 9 \\ 0 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$이다. 따라서 이 행렬을 첨가행렬로 갖는 선형연립방정식은

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ \quad\quad y+z=2 \\ \quad\quad\quad z=3 \end{cases} \quad \text{이므로} \quad \begin{cases} z=3 \\ y=2-z=-1 \\ z=3 \end{cases}$$

구하는 해는 다음과 같다. $x=2,\ y=-1,\ z=3.$ ■

● **Gauss-Jordan 소거법**: 선형연립방정식의 첨가행렬을 RREF로 변형하여 푸는 방법이다.

예제 8 다음 연립방정식을 Gauss-Jordan 소거법으로 풀어라.

$$\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3\quad\quad +2x_5\quad\quad &= 0 \\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6 &= -1 \\ 5x_3+10x_4\quad\quad +15x_6 &= 5 \\ 2x_1+6x_2\quad\quad +8x_4+4x_5+18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

풀이 행렬의 크기가 3차 이상이므로 여기에서는 Sage를 이용하여 풀자. □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/2-VT-Gauss-Jordan.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix([[1,3,-2,0,2,0],[2,6,-5,-2,4,-3],[0,0,5,10,0,15], [2,6,0,8,4,18]])
b=vector([0,-1,5,6])
print A.augment(b).rref()
```

```
[ 1   3   0   4   2   0   0]
[ 0   0   1   2   0   0   0]
[ 0   0   0   0   0   1 1/3]
[ 0   0   0   0   0   0   0]
```

이므로 이 행렬을 첨가행렬로 갖는 선형연립방정식은

$$\begin{cases} x_1+3x_2\quad +4x_4+2x_5 \quad = 0 \\ \quad\quad x_3+2x_4 \quad\quad = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_6 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

이다.

$x_2=r,\ x_4=s,\ x_5=t$($r,\ s,\ t$는 임의의 실수)라 놓으면 구하는 해는

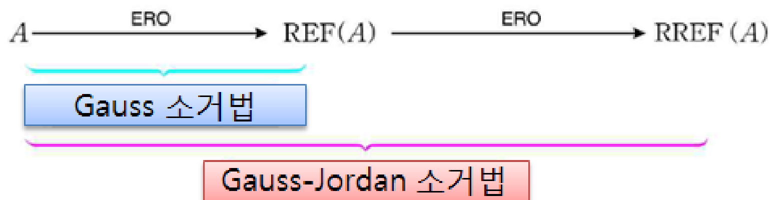
$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\quad x_2 = r,\quad x_3 = -2s,\quad x_4 = s,\quad x_5 = t,\quad x_6 = 1/3.$$

■

위의 예제 8에서 일반해를 다음과 같이 벡터 형식으로 표현할 수 있다. $(r,\ s,\ t \in R)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r-4s-2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3r \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4s \\ 0 \\ -2s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

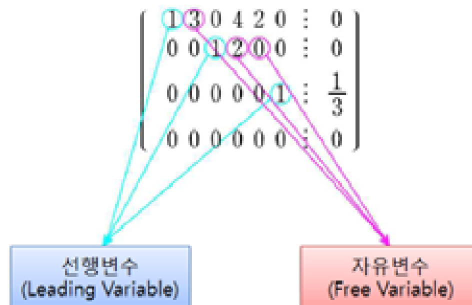
참고 Gauss 소거법과 Gauss-Jordan 소거법



참고 선형변수, 자유변수 RREF와의 관계

자유변수: 첨가행렬의 RREF 중 선행성분 1을 포함하지 않는 열에 대응하는 변수

선행변수: 선행성분 1을 포함하는 열에 대응하는 변수



동차(homogeneous)연립방정식

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

위 동차연립방정식은 x=0를 **자명한 해**(trivial solution)로 갖는다. 따라서 동차연립방정식은 (유일한) 자명한 해만을 갖는 경우와 무수히 많은 해를 갖는 두 가지 경우밖에 없다.

예제 9 Gauss-Jordan 소거법으로 다음 동차연립방정식의 해를 열벡터로 표현하여라.

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0 \\
5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 0 \\
2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0
\end{cases}
$$

풀이 첨가행렬은 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & \vdots & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$, RREF는 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$이다. 이 때, 선행성분 1에 대응하는 선행변수 x_1, x_3, x_6를 나머지 변수 x_2, x_4, x_5 (자유변수)들을 이용하여 표현하면 다음을 얻는다.

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5,\ x_3 = -2x_4,\ x_6 = 0$$

이제 자유변수를 각각 $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$로 지정하면,

$$x_1 = -3r - 4s - 2t,\ x_2 = r,\ x_3 = -2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t,\ x_6 = 0.$$

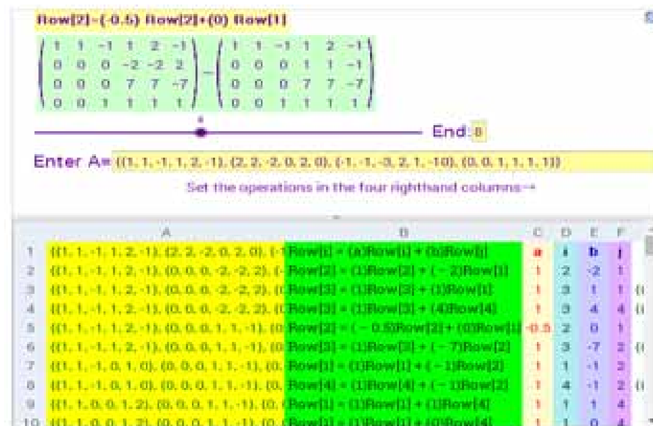
$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ■

정리 2.2.2 [동차연립방정식의 자유변수 개수정리]

n개의 미지수를 갖는 동차연립방정식에 대하여 첨가행렬의 RREF가 r개의 선행성분 1(leading 1)을 갖는다면 해집합은 $n-r$개의 자유변수를 갖는다.

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[기본행 연산] http://www.geogebratube.org/student/b73259#material/28831



수학의 단순함을 부정하는 것은,
인생의 복잡함을 깨닫지 못하기 때문이다.

폰노이만 1903-1957

기초수학, 경제학, 게임이론, 컴퓨터 개발…
다양한 분야에 업적을 세운 천재 수학자



Chapter 2 연습문제

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm

문제 1 아래 선형연립방정식에 대하여 다음 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(1) 계수행렬을 구하여라.

(2) 선형연립방정식을 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 모양으로 나타내어라.

(3) 첨가행렬을 구하여라.

문제 2 첨가행렬이 다음과 같은 선형연립방정식을 구하여라.
(미지수는 x_1, $\cdots$, x_n으로 놓아라.)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

문제 3 다음 연립방정식의 해집합에서 선행변수와 자유변수의 개수를 각각 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 9x_4 - 7x_5 = 1 \\ \qquad 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 6x_5 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad -5x_4 \qquad\quad = 3 \end{cases}$$

문제 4 다음 행렬 중 REF와 RREF인 것을 찾고, RREF가 아닌 것은 RREF로 변형시켜라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

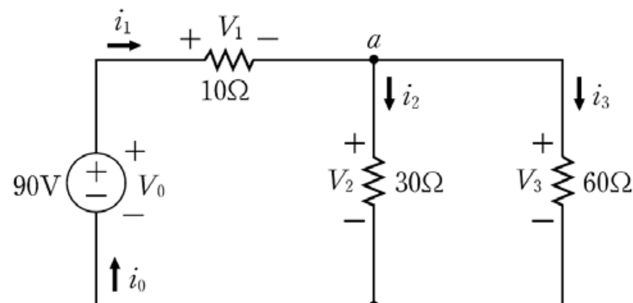
문제 5 다음 연립방정식을 Gauss 소거법으로 풀어라.

$$\begin{aligned} 2x + y + z - 2w &= 1 \\ 3x - 2y + z - 6w &= -2 \\ x + y - z - w &= -1 \\ 5x - y + 2z - 8w &= 3 \end{aligned}$$

문제 6 다음 연립방정식을 Gauss-Jordan 소거법으로 풀어라.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \\ 2x + 6y + 2z &= 22 \end{aligned}$$

문제 7 다음 회로도에서 전류 I_i를 구하는 연립방정식을 각각 작성하여라.



문제 P1 일반적으로 n개의 미지수를 가진 m개의 선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

이 있다. 이 식에서 만일 자유변수가 k개라면 선행변수는 몇 개인가? 이것으로부터 자유변수와 선행변수 그리고 미지수의 개수 사이의 관계를 생각해보아라.

문제 P2 다음을 해집합으로 갖는 미지수 4개, 방정식 3개로 이루어진 동차선형연립방정식을 하나 작성하여라.

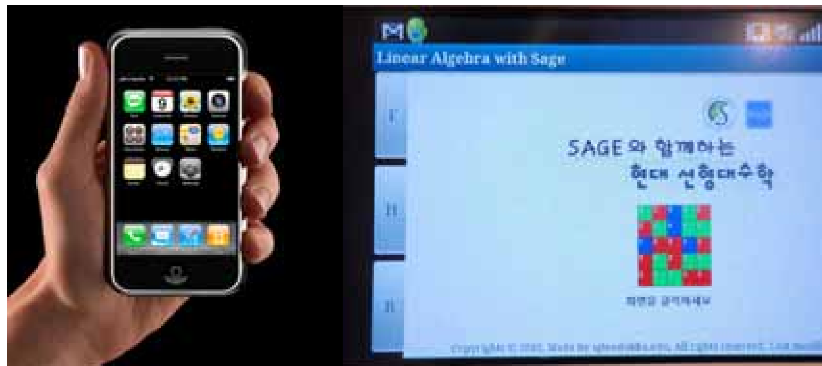
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(여기서 } s,\ t\text{는 임의의 실수)}$$

문제 P3 다음 세 점 $(1, 4)$, $(-1, 6)$, $(2, 9)$를 지나는 포물선 $ax^2 + bx + c = y$를 구하기 위하여 세 점을 대입하면 3개의 선형방정식을 얻게 된다. 이것으로 선형연립방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$를 만들어 계수 a, b, c를 구해보아라.

문제 P4 다음 조건을 만족하는 네 개의 미지수를 갖는 네 개의 식으로 구성된 일차 연립방정식을 구성하여라.

(a) 한 개의 미지수로 이루어진 해집합

(b) 두 개의 미지수로 이루어진 해집합



[선형대수학 with Sage 스마트폰 어플(App)]
https://play.google.com/store/apps/details?id=la.sage



〈호머 헐버트〉 육영공원 (수학)교사, 한성사범학교 교사
http://www.youtube.com/watch?v=YqJX7T9Shok
http://ko.wikipedia.org/wiki/호머_헐버트

Chapter 3

행렬과 행렬대수

3.1 행렬연산
3.2 역행렬
3.3 기본행렬
3.4 부분공간과 일차독립
3.5 선형연립방정식의 해집합과 행렬
3.6 특수행렬들(Special matrices)
연습문제

행렬은 선형연립방정식을 풀 때뿐만 아니라 소리와 이미지를 디지털로 전송하는 도구로도 이용됩니다. 우리는 행렬 사이의 덧셈과 곱셈 같은 연산을 정의합니다. 이러한 행렬 연산은 다양한 선형연립방정식을 쉽게 푸는 도구도 됩니다. 또 행렬의 곱셈은 합성함수를 다룰 때 훌륭한 도구가 됩니다.

앞 장에서는 가우스소거법을 이용하여 연립방정식의 해를 구하였습니다. 이번에는 행렬 사이의 덧셈연산과 스칼라곱셈연산을 정의하고, 행렬연산의 대수적 성질을 소개합니다. 이어서 가우스소거법을 이용하여 역행렬을 구하는 방법을 배웁니다.

또한 선형연립방정식의 구조를 살펴보는데 필수적인 개념인 부분공간과 일차독립에 대하여 살펴보고 그를 이용하여 선형연립방정식의 해집합과 행렬의 관계, 특수행렬에 관하여 살펴보겠습니다.

선형대수학

3.1 행렬연산

- 참고 동영상: http://youtu.be/JdNnHGdJBrQ
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-3-Sec-3-1.html



이 절에서는 행렬 사이의 덧셈연산과 스칼라곱셈연산을 정의하고, 행렬연산의 대수적 성질을 소개한다. 이 중 많은 성질은 실수연산과 일치하지만, 일부 성질은 다른 것을 볼 수 있다. 행렬연산은 실수 연산의 일반화된 모습이다.

정의 [행렬의 상등]

두 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$가 모든 i, j에 대하여 $a_{ij}=b_{ij}$를 만족하면 **서로 같다**(equal)고 하고 $A=B$로 나타낸다.

- 상등이 정의되려면 두 행렬의 크기가 같아야 한다.



두 행렬

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & w\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & x & 4\\ y & -4 & z\end{bmatrix}$$

가 $A=B$이기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

풀이 $A=B$이기 위해서는 대응하는 성분이 모두 같아야 하므로 (즉, $a_{ij}=b_{ij}$) $w=-1$, $x=-3$, $y=0$, $z=5$이다. ■

정의 [행렬의 덧셈과 스칼라배]

두 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$와 실수 k에 대하여 A와 B의 **합(sum)** $A+B$와 A의 **스칼라배(scalar multiple)** kA를 다음과 같이 정의한다.

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n},\quad kA=[ka_{ij}]_{m\times n}$$

- 행렬 덧셈이 정의되려면 두 행렬의 크기가 같아야 한다.

예제 2 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$일 때, $A+B$, $2A$, $(-1)C$는?

풀이 $A+B=\begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 & -4+4 \\ -2-1 & 1+3 & 3+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$,

$2A=\begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-4) \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$(-1)C=\begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 2 & (-1)\cdot 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/3-MA-operation.html
- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/3-MA-operation-1.html




Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ,[[1,2,-4], [-2,1,3]])
B=matrix(QQ,[[0,1,4], [-1,3,1]])
C=matrix(QQ,[[1,1],[2,2]])
print A+B                  # 행렬의 덧셈
print
print 2*A                  # 행렬의 스칼라배
print
print (-1)*C               # 행렬의 스칼라배
```

```
[ 1  3  0]      [ 2  4 -8]      [-1 -1]
[-3  4  4]      [-4  2  6]      [-2 -2]
```
■

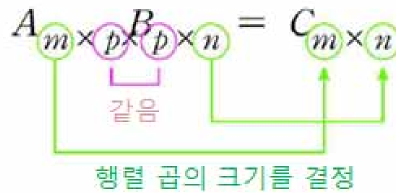
정의 [행렬의 곱셈]

두 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times p}$, $B=[b_{ij}]_{p\times n}$에 대하여 A와 B의 곱(product) AB를 다음과 같이 정의한다.

$$AB=[c_{ij}]_{m\times n}$$

여기서, $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\ (1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$

참고 행렬의 곱이 성립하기 위한 조건



참고 행렬 곱의 의미

$A=[a_{ij}]_{m\times p}$, $B=[b_{ij}]_{p\times n}$라 하고, A의 i번째 행을 $A_{(i)}$, A의 j번째 열을 $A^{(j)}$로 표기하자. 그러면

$$C=AB=\begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B^{(1)} & B^{(2)} & \cdots & B^{(n)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{(1)}B^{(1)} & A_{(1)}B^{(2)} \cdots & A_{(1)}B^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{(m)}B^{(1)} & \cdots & A_{(m)}B^{(n)} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

즉, $c_{ij}=A_{(i)}B^{(j)}=[a_{i1} \cdots a_{ip}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

앞 행렬 A의 행벡터와 뒤 행렬 B의 열벡터의 **내적**(inner product)이 AB 행렬의 해당 위치에 대응하는 성분과 일치한다.

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

예제 3 두 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (1)(-2)+(2)(0)+(-1)(2) & (1)(1)+(2)(-3)+(-1)(1) \\ (3)(-2)+(1)(0)+(0)(2) & (3)(1)+(1)(-3)+(0)(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/3-MA-operation-1-multiply.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ,[[1,2,-1], [3,1,0]])
B=matrix(QQ,[[-2,1], [0,-3], [2,1]])
print A*B                              # 곱하기 기호 (*) 빼먹지 않도록!
```

```
[-4 -6]
[-6  0]
```
■

행렬의 곱을 이용하면 선형연립방정식을 쉽게 표현할 수 있다. 아래 선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

에서 계수와 미지수, 상수항을 각각 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$이라 하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A\mathrm{x} = \mathrm{b} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)} = \mathrm{b}$$

선형연립방정식의 일반적 형식 ⇔ **선형연립방정식의 벡터 형식**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{bmatrix}$$

정리 3.1.1

행렬 A, B, C는 각 연산이 정의될 수 있는 적당한 크기의 행렬이고, a, b가 스칼라일 때, 다음이 성립한다.

(1) $A+B=B+A$ (덧셈의 교환법칙)
(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (덧셈의 결합법칙)
(3) $A(BC)=(AB)C$ (곱셈의 결합법칙)
(4) $A(B+C)=AB+AC$(분배법칙)
(5) $(B+C)A=BA+CA$ (분배법칙)
(6) $a(B+C)=aB+aC$ $A(B+C)=AB+AC$
(7) $(a+b)C=aC+bC$
(8) $(ab)C=a(bC)$
(9) $a(BC)=(aB)C=B(aC)$

예제 4 다음 행렬에 대하여 곱에 관한 결합법칙을 확인하여라.

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}$$

풀이 $AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}$이므로 $(AB)C=\begin{bmatrix}8&5\\20&13\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&15\\46&39\\4&3\end{bmatrix}$

또, $BC=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&9\\4&3\end{bmatrix}$이므로 $A(BC)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&9\\4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&15\\46&39\\4&3\end{bmatrix}$

$\therefore\ (AB)C=A(BC)$ ■

- 행렬연산의 성질은 우리가 이미 알고 있는 실수의 연산성질과 유사한 점이 많다.
- 예외: 행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$가 일반적으로는 성립하지 않는다.

예제 5 행렬 A, B, C, D, E가 각각 다음과 같다고 하자.

$$A=\begin{bmatrix}5&2&3\\-2&-3&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&2&2&2\\3&0&-1&3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0\\2&-3\\2&1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}-1&0\\2&3\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}$$

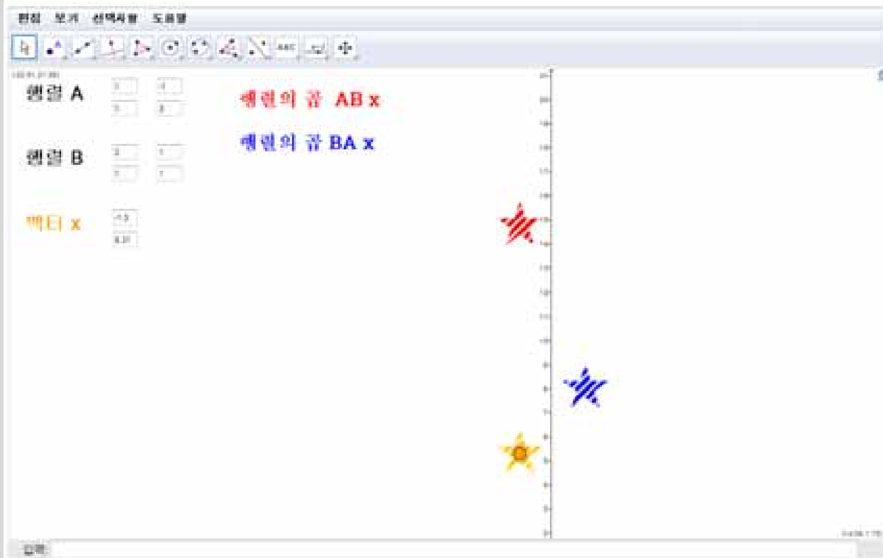
이때 AB는 정의되지만 BA는 정의되지 않으며, AC는 2×2 행렬이지만 CA는 3×3 행렬이므로 $AC\neq CA$이다. 또 DE나 ED는 모두 2×2 행렬이지만 다음에서 알 수 있듯이 $DE\neq ED$이다.

$$DE=\begin{bmatrix}-1&-2\\11&4\end{bmatrix},\ ED=\begin{bmatrix}3&6\\-3&0\end{bmatrix}$$ ■

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[행렬의 곱] (일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는다.)

http://www.geogebratube.org/student/m12831



정의 [영행렬]

영행렬(zero matrix)은 성분이 모두 0인 행렬로 O(또는 $O_{m \times n}$)로 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [0] \cdots$$

정리 3.1.2

임의의 행렬 A와 영행렬 O에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A+O=O+A=A$

(2) $A-A=O$

(3) $O-A=-A$

(4) $AO=OA=O$

● **주의:** $AB=O$이지만 $A\neq O$, $B\neq O$일 수 있다.
$AB=AC$, $A\neq O$이지만 $B\neq C$일 수도 있다.

예제 6 행렬 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&5\\3&4\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}3&7\\0&0\end{bmatrix}$에서 $AB=\begin{bmatrix}3&4\\6&8\end{bmatrix}=AC$이고 $A\neq O$이지만 $B\neq C$이다. 또한 $AD=O$이지만 $A\neq O$, $D\neq O$이다. ■

정의 [단위행렬]

주대각선성분이 모두 1이고 나머지 성분은 모두 0인 n차의 정사각형 행렬을 **단위행렬(identity matrix)**이라 하고, I_n으로 나타낸다.

$$I_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

● A가 $m\times n$ 행렬일 때, 단위행렬 I_m, I_n에 대하여 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$I_mA=A=AI_n$$

예제 7 행렬 $A=\begin{bmatrix}4&-2&3\\5&0&2\end{bmatrix}$일 때, $I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2&3\\5&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&3\\5&0&2\end{bmatrix}=A$이고,

$$AI_3=\begin{bmatrix}4&-2&3\\5&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&3\\5&0&2\end{bmatrix}=A\text{이다.}$$

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ,[[4,-2,3], [5,0,2]])
I2=identity_matrix(2)      # 단위행렬 identity_matrix(n), n은 행렬의 크기
I3=identity_matrix(3)
O2=zero_matrix(3, 2)      # 영행렬 zero_matrix(m, n), m, n은 행렬의 크기
print I2*A
print
print A*I3
print
print A*O2
```

```
[ 4 -2  3]
[ 5  0  2]

[ 4 -2  3]
[ 5  0  2]

[0 0]
[0 0]
```

■

정의 [행렬의 거듭제곱]

A가 n차의 정사각행렬일 때, A의 **거듭제곱**을 다음과 같이 정의한다.

$$A^0 = I_n,\quad A^k = AA\cdots A(k\text{개})$$

정리 3.1.3

A가 정사각행렬이고 r, s가 음이 아닌 정수일 때, 다음이 성립한다.

$$A^r A^s = A^{r+s},\quad (A^r)^s = A^{rs}$$

예제 8 행렬 $A=\begin{bmatrix}4&-2\\5&0\end{bmatrix}$에 대하여 A^2, A^3, A^0을 구하고 $(A^2)^3 = A^6$임을 확인하라.

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ,[[4,-2], [5,0]])
print A^2                  # 행렬의 거듭제곱은 정사각행렬일 때만 적용
```

```
print
print A^3                # 실수의 거듭제곱과 같은 형식
print
print A^0                # 지수가 0일 때는 단위행렬 생성
print
(A^2)^3==A^6              # 지수법칙 성립여부 확인
```

```
[  6  -8]
[ 20 -10]

[-16 -12]
[ 30 -40]

[1 0]
[0 1]

True
```
■

실수에서는 $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$이다. 그러나 행렬 연산에서는 행렬의 가환성이 언제나 성립하지는 않으므로 아래 결과가 최선이다.

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

단지 $AB = BA$일 경우에만, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$이 성립한다.

정의 [전치행렬]

행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$에 대하여 A의 **전치행렬(transpose)**을 A^T로 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$A^T = [a_{ij}{}']_{n \times m}, \ a_{ij}{}' = a_{ji} \quad (1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$$

● 전치행렬은 원 행렬의 행과 열을 바꾸어 얻어진 행렬이다.

예제 9 다음 행렬들의 전치행렬을 각각 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

풀이 $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$D^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $E^T = [2 \;\; 0 \;\; -3]$. □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ,[[1,-2,3], [4,5,0]])
C=matrix(QQ,[[5,4], [-3,2], [2,1]])
D=matrix(QQ, [[3,0,1]])
print A.transpose()             # 행렬의 전치행렬 A.transpose()
print
print C.transpose()
print
print D.transpose()
```

```
[ 1  4]          [ 5 -3  2]          [3]
[-2  5]          [ 4  2  1]          [0]
[ 3  0]                              [1]
```
■

정리 3.1.4

두 행렬 A, B와 임의의 스칼라 k에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(AB)^T = B^T A^T$

(4) $(kA)^T = kA^T$

예제 10 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$에 대하여, 위 **정리** 3.1.4의 (3)이 성립함을 보여라.

풀이 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 15 \\ 12 & 7 & 26 \end{bmatrix}$이므로 $(AB)^T = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$.

또한, $B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$. $\quad \therefore \; (AB)^T = B^T A^T$ ■

정의 [대각합]

행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$의 **대각합(trace)**은 $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$이다.

정리 3.1.5

A, B가 같은 크기의 정사각행렬이고, $c\in R$이면

(1) $\mathrm{tr}(A^T)=\mathrm{tr}(A)$
(2) $\mathrm{tr}(cA)=c\,\mathrm{tr}(A)$, $c\in R$
(3) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$
(4) $\mathrm{tr}(A-B)=\mathrm{tr}(A)-\mathrm{tr}(B)$
(5) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

증명 (5)번만 증명하고 나머지는 연습문제로 남긴다.

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}\right)=\mathrm{tr}(BA)$$ ■

예제 11 행렬 $A=\begin{bmatrix}1&-2\\4&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&4\\-3&2\end{bmatrix}$에 대하여, 위 **정리** 3.1.5의 (5)가 성립함을 보여라.

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ,[[1,-2], [4,5]])
B=matrix(QQ,[[5,4], [-3,2]])
print (A*B).trace()          # 대각합. 형식은 A.trace()
print
print (B*A).trace()
```

```
37

37
```
■

3.2 역행렬

- 참고 동영상: http://youtu.be/yeCUPdRx7Bk
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-3-Sec-3-2.html



이 절에서는 정사각행렬의 연산 중 실수에서의 역수와 같은 역할을 하는 역행렬에 대해 소개한다. 그리고 역행렬의 성질을 살펴본다. 많은 성질이 실수연산과 일치하지만, 일치하지 않는 경우를 보게 될 것이다.

정의 [가역행렬과 역행렬]

n차의 정사각행렬 A에 대하여 다음을 만족하는 행렬 B가 존재하면 A는 **가역(invertible, nonsingular)**이라고 한다.

$$AB = I_n = BA$$

이때 B를 A의 **역행렬(inverse matrix)**이라고 하며, 이러한 B가 존재하지 않으면 A는 **비가역(noninvertible, singular)**이라고 한다.

예제 1 행렬 $A=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$에서 $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$, $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$이므로 B는 A의 역행렬이다. ■

예제 2 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$는 3행의 성분이 모두 0이므로 임의의 3×3 행렬 $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$에 대하여 AB의 3행은 언제나 $[0\ \ 0\ \ 0]$이다. 따라서 $AB = I$인 B가 존재하지 않으므로 A는 비가역이다.

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ,[[1,4,3],[2,5,6],[0,0,0]])
A.is_invertible()       # 행렬이 가역인지 확인 A.is_invertible()
```

```
False
```
■

정리 3.2.1

n차의 정사각행렬 A가 가역이면 A의 역행렬은 유일하다.

증명 행렬 B, C가 모두 A의 역행렬이라고 하면

$$AB = BA = I_n, \quad AC = CA = I_n$$

이므로

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

이다. 따라서 A의 역행렬은 유일하다. ■

예제 3 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$가 가역일 필요충분조건은 $ad - bc \neq 0$ 이고, 이 경우

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

이다. 실제로 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$를 곱하면 단위행렬이 됨을 쉽게 확인할 수 있다. ■

정리 3.2.2

n차의 정사각행렬 A, B가 가역이고 k가 0이 아닌 스칼라일 때, 다음이 성립한다.

(1) A^{-1}은 가역이고, $(A^{-1})^{-1} = A$ 이다.

(2) AB는 가역이고, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 이다.

(3) kA는 가역이고, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ 이다.

(4) A^n도 가역이고, $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$

증명 (1)~(4) 모두 각각 곱하여 단위행렬이 됨을 쉽게 보일 수 있다. ■

정리 3.2.3

만일 A가 가역행렬이면, A^T도 가역행렬이고 다음이 성립한다.

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

예제 4 두 행렬 $A=\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}$에 대하여 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$임을 확인하여라.

풀이

$$A^{-1}=\frac{1}{6-5}\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix},$$

$$B^{-1}=\frac{1}{7-6}\begin{bmatrix}7&-3\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3\\-2&1\end{bmatrix}$$

이므로 $B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&-44\\-5&13\end{bmatrix}$이다. 또한

$AB=\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&44\\5&17\end{bmatrix}$이므로

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{221-220}\begin{bmatrix}17&-44\\-5&13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&-44\\-5&13\end{bmatrix}.$$ □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/3-SO-MA-inverse.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(ZZ, 2, 2, [3, 5, 1, 2])
B=matrix(ZZ, 2, 2, [1, 3, 2, 7])
AB=A*B                          # AB 계산
print AB.inverse()              # AB의 역행렬, 형식은 A.inverse()
print
print B.inverse()*A.inverse()   # B^(-1)*A^(-1)
```

```
[ 17 -44]
[ -5  13]

[ 17 -44]
[ -5  13]
```
■

3.3 기본행렬

- 참고 동영상: http://youtu.be/oQ2m6SSSquc
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-3-Sec-3-3.html



앞 절에서 정사각행렬의 역행렬을 정의하였다. 이 절에서는 기본행렬과 기본행연산을 이용하여 역행렬을 구하는 과정을 설명한다.

정의 [기본행렬과 치환행렬]

I_n에 **기본행연산(elementary row operation, ERO)**을 한 번 적용해서 얻은 행렬을 **기본행렬(elementary matrices)**이라 한다. 그리고 **치환(permutation)행렬**은 I_n의 행들을 교환하여 얻어진 행렬이다.

예제 1 세 가지 기본행연산에 대응하는 기본행렬들은 다음과 같다.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$: 두 행을 교환한다. $R_i \leftrightarrow R_j$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: 한 행에 영 아닌 상수배를 해서 다른 행에 더한다. $kR_j + R_i$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: 한 행에 영 아닌 상수배를 한다. kR_i

Sage풀이 http://sage.skku.edu (주의!! Sage의 index는 0부터 시작한다.)

```
E1=elementary_matrix(4, row1=1, row2=2)   # 기본행렬 r2 <--> r3
# elementary_matrix(n, row1=i, row2=j)     i행과 j행을 교환
E2=elementary_matrix(4, row1=2, scale=-3)  # 기본행렬 (-3)*r3
# elementary_matrix(n, row1=i, scale=m)    i행에 m을 곱한다.
E3=elementary_matrix(4, row1=0, row2=3, scale=7) # 기본행렬 7*r4 + r1
# elementary_matrix(n, row1=i, row2=j, scale=m)   j행에 m을 곱하여 i행에 더함
print E1
print E2
print E3
```

```
[1 0 0 0]      [ 1  0  0  0]      [1 0 0 7]
[0 0 1 0]      [ 0  1  0  0]      [0 1 0 0]
[0 1 0 0]      [ 0  0 -3  0]      [0 0 1 0]
[0 0 0 1]      [ 0  0  0  1]      [0 0 0 1]
```
■

예제 2 **[기본행렬의 성질]** 임의의 행렬의 왼쪽에 기본행렬을 곱한 결과는 기본행렬에 대응하는 기본행 연산을 주어진 행렬에 시행한 결과와 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ, 3,3, [1,2,3,1,1,1,0,1,3])
E1=elementary_matrix(3, row1=1, row2=2)           # 기본행렬 r2 <--> r3
E2=elementary_matrix(3, row1=1, row2=0, scale=2)  # 기본행렬 2*r1 + r2
E3=elementary_matrix(3, row1=1, scale=3)          # 기본행렬 3*r2
print E1*A
print
print E2*A
print
print E3*A
```

```
[1 2 3]     [1 2 3]     [1 2 3]
[0 1 3]     [3 5 7]     [3 3 3]
[1 1 1]     [0 1 3]     [0 1 3]
```
■

참고 기본행렬의 역행렬은 기본행렬이다

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{이므로} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{이므로} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 이므로 $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix}$$

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
E1=elementary_matrix(3, row1=1, row2=2)           # 기본행렬 r2 <--> r3
E2=elementary_matrix(3, row1=2, row2=1, scale=4)    # 기본행렬 4*r2 + r3
E3=elementary_matrix(3, row1=1, scale=3)           # 기본행렬 3*r2
print E1.inverse()
print
print E2.inverse()
print
print E3.inverse()
```

```
[1 0 0]        [ 1  0  0]        [ 1   0   0]
[0 0 1]        [ 0  1  0]        [ 0 1/3   0]
[0 1 0]        [ 0 -4  1]        [ 0   0   1]
```

가역행렬의 역행렬 구하기

이제 기본행렬을 이용하여 가역행렬의 역행렬을 구하는 방법에 대하여 살펴보자. 먼저 가역행렬과 동치인 명제는 다음과 같다(증명은 7장에서 다룬다).

정리 3.3.1 [가역행렬과 동치인 명제]

임의의 n차 정사각행렬 A에 대하여 다음은 동치이다.

(1) A는 가역(invertible)행렬이다.

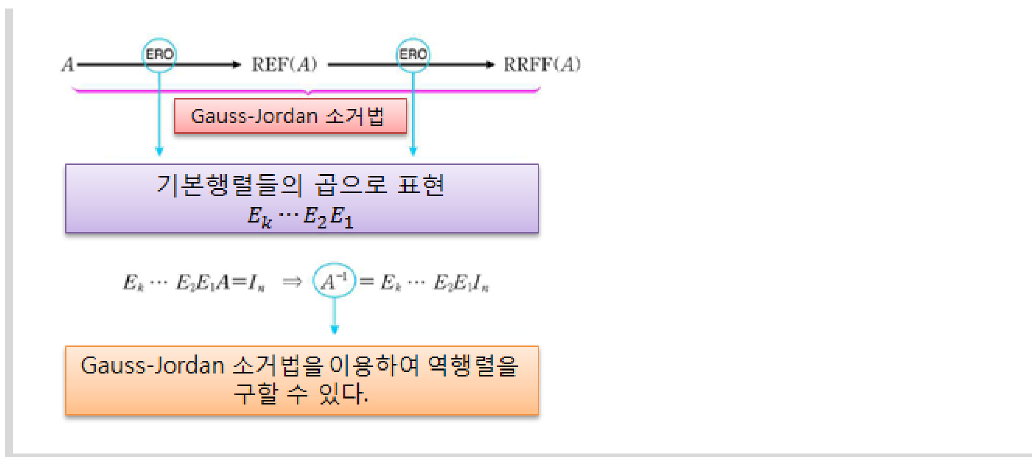
(2) A는 I_n과 행동치(row equivalent)이다. (즉, $\text{RREF}(A)=I_n$)

(3) A는 기본행렬(elementary matrix)들의 곱으로 쓸 수 있다.

(4) $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$은 유일한 해(trivial solution) $\mathbf{0}$을 가진다.

만약 A의 역행렬이 존재한다면 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$이라는 식에서 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$인 자명한 해를 갖게 된다. 그러므로 행렬 A는 ERO를 유한히 반복함으로써 단위행렬로 만들 수 있다. A가 단위행렬과 행동치이므로 A에 취하는 유한번의 ERO에 해당하는 유한개의 기본행렬이 존재하게 된다.

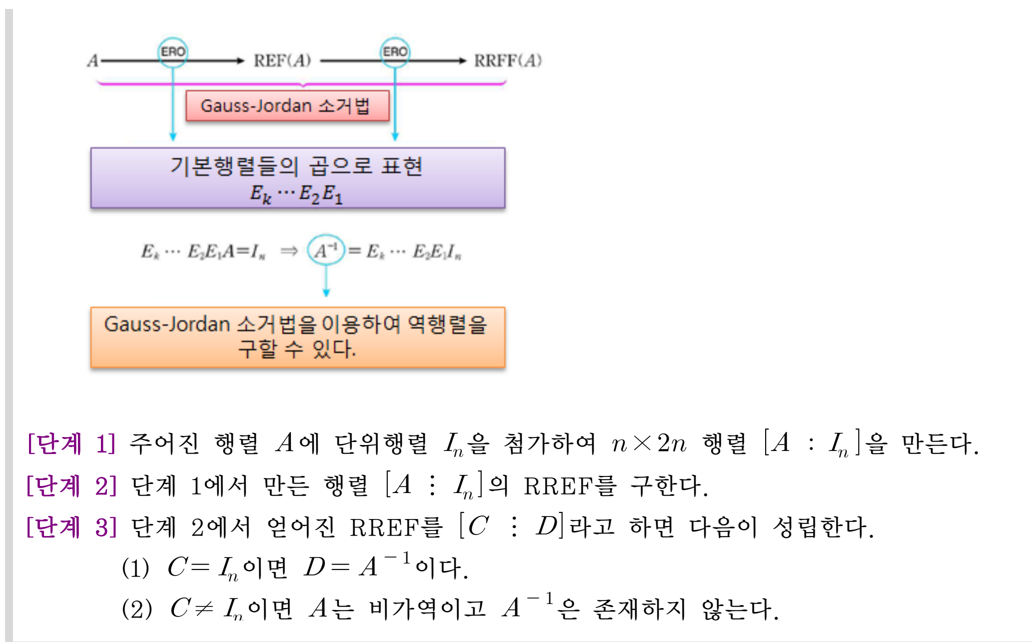
참고 기본행렬과 기본행연산을 이용한 역행렬 구하기



정리 3.3.2 [역행렬 계산]

$[A \ : I_n] \rightarrow [I_n \ : A^{-1}]$

참고 Gauss-Jordan 소거법을 이용한 역행렬 연산법



[단계 1] 주어진 행렬 A에 단위행렬 I_n을 첨가하여 $n \times 2n$ 행렬 $[A \ : I_n]$을 만든다.
[단계 2] 단계 1에서 만든 행렬 $[A \ : I_n]$의 RREF를 구한다.
[단계 3] 단계 2에서 얻어진 RREF를 $[C \ : D]$라고 하면 다음이 성립한다.

(1) $C = I_n$이면 $D = A^{-1}$이다.

(2) $C \neq I_n$이면 A는 비가역이고 A^{-1}은 존재하지 않는다.

예제 3 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$$

풀이 $[A\ \vdots\ I_3]$를 만들면

$$[A\ \vdots\ I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{array}\right]$$

이고, 이 행렬의 RREF를 구하면

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&-2&5&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&-1&-5&2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-14&6&3\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right]=[C\ \vdots\ D]$$

이다. $C=I_3$ 이므로 $D=A^{-1}$이다.

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$$

■

예제 4 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix}1&6&4\\2&4&-1\\-1&2&5\end{bmatrix}$$

풀이 마찬가지로

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&6&4&1&0&0\\2&4&-1&0&1&0\\-1&2&5&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&6&4&1&0&0\\0&-8&-9&-2&1&0\\0&8&9&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&6&4&1&0&0\\0&-8&-9&-2&1&0\\0&0&0&-1&1&1\end{array}\right]=[C\ \vdots\ D]$$

이고, $C\neq I_3$이므로 A^{-1}는 존재하지 않는다.

■

예제 5 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/3-MA-Inverse_by_RREF.html



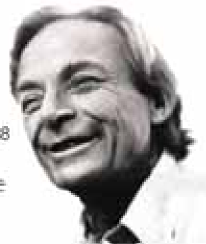
Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ, 3, 3, [1, -1, 2, -1, 0, 2, -6, 4, 11])
I=identity_matrix(3)
A.augment(I).echelon_form()        # 첨가행렬 [A : I]의 echelon_form
```

```
[   1    0    0 |  8/15 -19/15   2/15]
[   0    1    0 |  1/15 -23/15   4/15]
[   0    0    1 |  4/15 -2/15    1/15]
```

이므로 $A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 & -19 & 2 \\ 1 & -23 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. 

수학을 알지 못한다면
자연의 진정한 아름다움을
온전히 이해할 수 없다
파인만 1918-1988



인류 역사상 가장 정교한 이론이라 일컬어지는
QED(양자전기역학) 정립

3.4 부분공간과 일차독립

- 참고 동영상: http://youtu.be/UTTUg6JUFQM
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-4-Sec-3-4.html



이 절에서는 R^n의 부분집합 중 두 가지 조건을 만족하는 부분공간을 정의하고, 일차결합, span, 일차독립, 일차종속을 정의한다. 동차선형연립방정식의 해집합이 부분공간을 이루는 것을 이용하여 선형연립방정식의 일반 해법을 학습한다.

정의 [부분공간]

집합 $W\,(\neq \varnothing)$가 R^n의 부분집합이라 하자. 이때 다음 두 조건을 만족하면 W는 R^n의 **부분공간(subspace)**이다.

(1) $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in W \;\Rightarrow\; \mathbf{x}+\mathbf{y} \in W$ (덧셈에 닫혀 있다.)
(2) $\mathbf{x} \in W,\ k \in R \;\Rightarrow\; k\mathbf{x} \in W$ (스칼라배에 닫혀 있다.)

- R^n의 모든 부분공간은 영벡터를 포함해야 한다.
  $\mathbf{x} \in W,\ 0 \in R \;\Rightarrow\; 0\mathbf{x} = \mathbf{0} \in W$

예제 1 $\{\mathbf{0}\}$과 R^n는 R^n의 부분공간이다. 여기서 $\mathbf{0} = (0,\ 0,\ \dots,\ 0)$은 원점이다. ■

예제 2 $L_0 = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x\}$, 즉 직선 $y = x$ 위의 점들의 집합은 위의 두 조건을 만족하므로 R^2의 부분공간이지만, $L_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x+1\}$, 즉 직선 $y = x+1$ 위의 점들의 집합은 아래와 같이 조건 (1)을 만족하지 못하므로 R^2의 부분공간이 아니다.

$(0, 1),\ (1, 2) \in L_1$이지만 $(0, 1) + (1, 2) = (1, 3) \notin L_1$ ■

예제 3 R^2의 모든 부분공간은 아래 3종류 중 하나이다.

1. 영공간: $\{\mathbf{0}\}$
2. 원점을 지나는 line
3. R^2 전체

R^3의 모든 부분공간은 아래 4종류 중 하나이다.

1. 영공간: $\{0\}$
2. 원점을 지나는 line
3. 원점을 지나는 평면
4. R^3 전체 ■

예제 4 집합 $W = \{(0, a, b, c, d, 0) \mid a, b, c, d \in R\}$은 R^6의 부분공간임을 보여라.

풀이 임의의 $\mathbf{x} = (0, a_1, b_1, c_1, d_1, 0)$, $\mathbf{y} = (0, a_2, b_2, c_2, d_2, 0) \in W$, $k \in R$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (0, a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2, 0) \in W$,

(2) $k\mathbf{x} = (0, ka_1, kb_1, kc_1, kd_1, 0) \in W$

따라서 정의에 의하여 W는 R^6의 부분공간이다. ■

예제 5 행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$에 대하여 집합 $W = \{\mathbf{x} \in R^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$은 벡터공간 R^n의 부분공간임을 보여라(이러한 W를 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 해공간(solution space) 또는 A의 영공간(null space)이라 한다).

풀이 우선 $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$이므로 $\mathbf{0} \in W$이다. 따라서 $W \neq \varnothing$이다.
이제 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in W$와 $k \in R$에 대하여 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$이므로

$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$,

$A(k\mathbf{x}) = k(A\mathbf{x}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\therefore\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$, $k\mathbf{x} \in W$

따라서 W는 R^n의 부분공간이다. ■

정의 [일차결합](부분공간의 구조를 이해하는데 필요하다.)

R^n의 부분집합 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$에 대하여, 벡터 $\mathbf{x} \in R^n$가

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k, \quad c_1, c_2, \ldots, c_k \in R$$

의 꼴로 표시되면, $\mathbf{x}$를 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$의 일차결합(linear combination)이라고 한다.

예제 6 R^3의 벡터 $\mathbf{x}_1 = (1, -2, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (3, -5, 4)$에 대하여 $\mathbf{x} = (2, -6, 3)$을 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$의 일차결합으로 표시할 수 있는가?

풀이 이 답은 방정식 $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$를 만족하는 실수 c_1, c_2가 존재하는가에 의해서 결정된다. 따라서 위의 식으로부터 다음을 얻는다.

(열벡터로 쓰면)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(3, 3, [1, 3, 2, -2, -5, -6, -1, 4, 3])  # 첨가행렬
print A.rref()
```

```
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
```

이 연립방정식을 만족하는 실수 c_1, c_2는 존재하지 않으므로 벡터 $\mathbf{x}$는 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$의 일차결합으로 표시할 수 없다. ■

예제 7 R^n의 부분집합 $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$에 대하여 S에 있는 k개 벡터들의 일차결합 전체의 집합, 즉 $W = \{c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in R\}$은 R^n의 부분공간임을 보여라.

풀이 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, $k \in R$이라 하자. 그러면 $c_i, d_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$에 대하여

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k, \quad \mathbf{y} = d_1\mathbf{x}_1 + d_2\mathbf{x}_2 + \cdots + d_k\mathbf{x}_k$$

라고 쓸 수 있으므로

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (c_1 + d_1)\mathbf{x}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (c_k + d_k)\mathbf{x}_k,$$
$$k\mathbf{x} = (kc_1)\mathbf{x}_1 + (kc_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (kc_k)\mathbf{x}_k.$$
$$\therefore \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W, \quad k\mathbf{x} \in W$$

따라서 W는 R^n의 부분공간이다. ■

위 예제 7의 W를 S에 의하여 생성된(spanned) R^n의 부분공간이라고 한다. 집합 S는 W를 생성(span)한다고 하고, S를 W의 생성집합(spanning

set)이라고 하며 기호로는 다음과 같이 나타낸다.

$$W = \text{span}\,(S) \text{ 또는 } W = < S >$$

특히, R^n에 있는 모든 벡터가 S에 있는 k개 벡터들의 일차결합이면 집합 S는 R^n을 생성한다. 즉 $R^n = < S > = \{c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in R\}$.

정의 [행공간과 열공간]

$A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$이면 A의 열벡터들 $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$의 **생성(span)**

$$< A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} > \text{ 또는 Col}(A)$$

은 R^m의 부분공간이다. 이를 행렬 A의 **열공간(column space)**이라 한다. 같은 방법으로 A의 행벡터들의 생성(span)

$$< A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(m)} > \text{ 또는 Row}(A)$$

은 R^n의 부분공간이다. 이를 행렬 A의 **행공간(row space)**이라 한다.

예제 8 R^3의 벡터 $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (-3, 1, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (-2, 1, 2)$에 대하여 $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$는 R^3를 생성하는가?

풀이 R^3의 임의의 벡터 $\mathbf{x} = (x, y, z)$에 대하여

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3, \quad (c_i \in R)$$

를 만족하는 c_1, c_2, c_3가 있는지를 묻는 문제이다.

(열벡터로 쓰면)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(3, 3, [1, -3, -2, 0, 1, 1, 1, 1, 2])  # 계수행렬
print A.rref()
```

[1 0 1]
[0 1 1]
[0 0 0]

따라서 c_1, c_2, c_3 중에서 해를 결정하지 못하는 원소가 하나가 있다는 의미이다. 따라서 이 방정식은 해를 유일하게 결정할 수 없는 경우가 된다. ■

정의 [일차독립과 일차종속]

$S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_k\} \subseteq R^n$에 대하여

$$c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k = 0 \quad (c_1, c_2, \ldots, c_k \in R) \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

이면, 벡터 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_k$(또는 집합 S)는 **일차독립(linearly independent)**이라고 하고, 벡터 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_k$(또는 집합 S)가 일차독립이 아니면 **일차종속(linearly dependent)**이라고 한다.

- 집합 S가 일차종속이면 $c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k = 0$을 만족하는 모두는 영이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_k$가 존재한다.

일반적으로, R^n의 **기본 단위벡터**

$$\mathrm{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ \mathrm{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots, \ \mathrm{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

에 대하여 $S = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \cdots, \mathrm{e}_n\}$은 일차독립이다. 왜냐하면

$$\begin{aligned} & c_1\mathrm{e}_1 + c_2\mathrm{e}_2 + \cdots + c_n\mathrm{e}_n = 0 \\ \Rightarrow\ & c_1(1, 0, \cdots, 0) + c_2(0, 1, \cdots, 0) + \cdots + c_n(0, 0, \cdots, 1) = (0, 0, \cdots, 0) \\ \Rightarrow\ & (c_1, c_2, \cdots, c_n) = (0, 0, \cdots, 0) \\ \Rightarrow\ & c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0 \end{aligned}$$

이기 때문이다.

예제 9 R^2의 벡터 $\mathbf{x}_1 = (2, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 3)$에 대하여 $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$는 일차독립임을 보여라.

풀이 임의의 $c_1, c_2 \in R$에 대하여

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; c_1(2, -1) + c_2(1, 3) = (0, 0)$$
$$\Rightarrow\; 2c_1 + c_2 = 0,\; -c_1 + 3c_2 = 0$$

따라서 $c_1 = c_2 = 0$이므로 S는 일차독립이다. ■

예제 10 벡터공간 R^n의 벡터 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$가 일차독립이면 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$가 일차독립임을 보여라.

풀이 임의의 $c_1, c_2, c_3 \in R$에 대하여

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + c_3(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{x}_1 + (c_2 + c_3)\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

그런데 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$가 일차독립이므로

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,\quad c_2 + c_3 = 0,\quad c_3 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

따라서 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$는 일차독립이다. ■

예제 11 R^3의 벡터 $\mathbf{x}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (0, 1, 1)$에 대하여 $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$는 일차종속임을 보여라.

풀이 임의의 $c_1, c_2, c_3 \in R$에 대하여 $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$라 하면

$$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$ □

Sage풀 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(3, 3, [1, 1, 0, 0, 1, 1, -1, 0, 1])  # 계수행렬
print A.rref()
```

```
[ 1  0 -1]
[ 0  1  1]
[ 0  0  0]
```

이 동차연립방정식은 미지수의 개수가 실제의 방정식의 수보다 많으므로 자명하지 않은 해가 존재

한다. 그 중에 하나는 $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$이다. 따라서 모두는 영이 아닌 스칼라 c_1, c_2, c_3가 존재하므로 S는 일차종속이다. ■

정리 3.4.1

집합 $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_k\} \subseteq R^n$에 대하여, 다음이 성립한다.

(1) 집합 S가 일차종속일 필요충분조건은 S에 속하는 한 벡터가 나머지 벡터들의 일차결합으로 표시되는 것이다.

(2) 집합 S가 영벡터를 포함하면 S는 일차종속이다.

(3) 집합 S의 부분집합 S'이 일차종속이면 S도 일차종속이고, S가 일차독립이면 S'도 일차독립이다.

증명 (1)번만 증명하고 나머지는 연습문제로 남긴다.

($\Rightarrow$) 집합 S가 일차종속이면

$$c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k = 0$$

을 만족하는 모두는 영이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_k$가 존재한다. 일반성을 잃지 않고 만일 $c_1 \neq 0$이라 하면

$\mathrm{x}_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathrm{x}_2 + \cdots + \left(-\frac{c_k}{c_1}\right)\mathrm{x}_k$ 이므로 x_1은 S에 속하는 나머지 벡터들의 일차결합으로 표시된다.

($\Leftarrow$) 일반성을 잃지 않고

$$\mathrm{x}_1 = c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k$$

라 하면

$$(-1)\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k = 0$$

이다. 따라서 $-1 \neq 0$이므로 S는 일차종속이다. ■

- 즉, 벡터의 집합 S가 일차독립이라는 의미는 S안의 어떤 벡터도 다른 벡터들의 일차결합으로 표시될 수 없는, 모두가 꼭 필요한 벡터들이라는 의미이다.

- 그리고, R^n에서 일차독립인 집합은 기껏해야 n개의 벡터들로 이루어져 있다.

정리 3.4.2 (증명은 7장 정리 7.1.2를 참고)

R^n에서 $m(>n)$개의 벡터는 항상 일차종속이다.

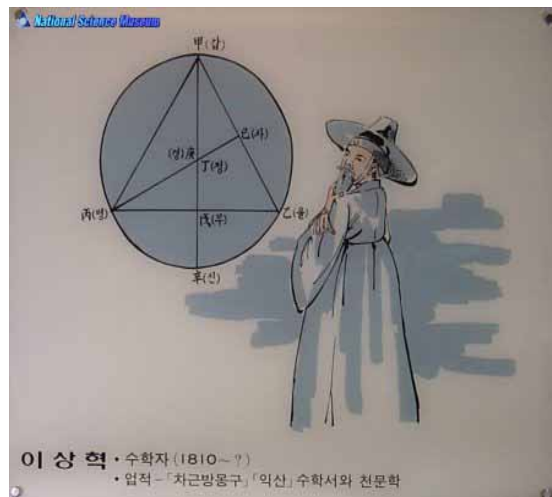
예제 12 R^3의 벡터 $\mathrm{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathrm{x}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathrm{x}_3 = (1, 1, 1)$, $\mathrm{x}_4 = (0, 1, 1)$에 대하여 $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4\}$는 **정리 3.4.2**에 의하여 일차종속임을 쉽게 알 수 있다. ■

참고 직선과 평면(부분공간의 관점에서)

(1) 벡터 v의 생성집합인 $< \mathrm{v} > = \{ t\mathrm{v} \mid t \in R \}$은 영벡터를 포함하는 부분공간이므로 $\{ \mathrm{x}_0 + t\mathrm{v} \mid t \in R \}$은 x_0을 지나는 v와 평행한 직선이다. 즉 직선 $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + t\mathrm{v}$는 $\mathrm{x} = t\mathrm{v}$를 x_0만큼 평행이동한 직선이다.

(2) $\mathrm{x}_0, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k$가 R^n의 벡터들이면 평면 $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + t_1\mathrm{v}_1 + \cdots + t_k\mathrm{v}_k \,(t_i \in R)$는 원점을 지나는 부분공간 (평면) $\mathrm{x} = t_1\mathrm{v}_1 + \cdots + t_k\mathrm{v}_k$을 x_0만큼 평행이동한 벡터들의 집합(평면)이다.





[이상혁] http://matrix.skku.ac.kr/2011-Album/2011-KoreanMath-SangHyukLEE.htm

3.5 선형연립방정식의 해집합과 행렬

- 참고 동영상: http://youtu.be/O0TPCpKW_eY
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-4-Sec-3-5.html



이 절에서는 행렬의 가역성과 선형연립방정식의 해 사이의 관계를 알아보고 동차연립방정식의 해집합에 대하여 살펴본다.

정리 3.5.1 [행렬의 가역성과 선형연립방정식의 해 사이의 관계]

n차의 정사각행렬 A가 가역이고 b가 R^n의 벡터일 때, 연립방정식 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$는 유일한 해 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$를 갖는다.

예제 1 아래 연립방정식을 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 1 \\ 2x_1+5x_2+3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad +8x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$라 하면, 행렬 A는 가역이고,

$A^{-1}=\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 위의 정리에 의하여 연립방정식의 해는

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이므로 즉 $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=0$이다. □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(3, 3, [1, 2, 3, 2, 5, 3, 1, 0, 8])      # 계수행렬
b=vector([1, 3, -1])
Ai=A.inverse()                               # 역행렬 계산
print "x=", Ai*b
print
print "x=", A.solve_right(b)                   # 직접 풀 수도 있다.
```

x= (−1, 1, 0)
x= (−1, 1, 0) ■

참고 동차선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$이라 할 때 $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$으로 나타낼 수 있다.

이때 $\mathrm{x} = \mathbf{0}$인 해를 **자명한 해(trivial solution)**, $\mathrm{x} \neq \mathbf{0}$인 해를 **자명하지 않은 해(nontrivial solution)**라 한다. 동차선형연립방정식은 항상 자명한 해를 가지므로 아래의 두 가지 경우만 갖는다.

(1) 자명한 해만 갖는다(유일해).
(2) 무수히 많은 해를 갖는다(즉 자명하지 않은 해도 갖는다).

정리 3.5.2 [동차선형연립방정식이 자명하지 않은 해를 갖는 경우]

n개의 미지수를 갖는 m개의 방정식으로 이루어진 동차선형연립방정식은 $m < n$이면, (즉 미지수의 개수가 방정식의 개수보다 많으면) 자명하지 않은 해를 갖는다.

예제 2 동차연립방정식

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + \qquad\quad x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

의 첨가행렬과 그의 RREF는 다음과 같다.

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(3, 5, [1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0])  # 첨가행렬
print "A="
print A
print
print "RREF(A)="
print A.rref()          # RREF
```

```
A=
[1 1 1 1 0]
[1 0 0 1 0]
[1 2 1 0 0]

RREF(A)=
[ 1  0  0  1  0]
[ 0  1  0 -1  0]
[ 0  0  1  1  0]
```

이것에 대응하는 연립방정식은

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $x_4 = r$ (r : 임의의 실수)이라 놓으면 선형연립방정식의 해는

$$x_1 = -r,\ x_2 = r,\ x_3 = -r,\ x_4 = r \quad (r \in R)$$

이다. 여기서 $r = 0$ 이면 자명한 해가 되고, $r \neq 0$ 이면 자명하지 않은 해가 된다. ■

정의 [수반동차연립방정식]

선형연립방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$에 대하여 $A\mathrm{x} = 0$을 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$의 **수반동차연립방정식(associated homogeneous system of linear equations)**이라고 한다.

예제 3 다음과 같은 선형연립방정식을 생각해보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

이 연립방정식의 수반동차연립방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

풀이 행렬의 크기가 3차 이상이므로 Sage를 이용하여 해를 구해보자.

선형연립방정식의 첨가행렬의 RREF를 구하면

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(4, 7, [1, 2, -2, 0, 2, 0, 0, 2, 6, -5, -2, 4, -3, -1, 0, 0, 5, 10, 0,
15, 5, 2, 6, 0, 8, 4, 18, 6])            # 첨가행렬
  print A.rref()                          # RREF
```

```
[ 1  0  0  4  2  0   0]
[ 0  1  0  0  0  0   0]
[ 0  0  1  2  0  0   0]
[ 0  0  0  0  0  1 1/3]
```

이므로, $x_4 = r$, $x_5 = s$라 하면 이 선형연립방정식의 해는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

그리고 수반동차연립방정식의 첨가행렬의 RREF를 구하면

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
B=matrix(4, 7, [1, 2, -2, 0, 2, 0, 0, 2, 6, -5, -2, 4, -3, 0, 0, 0, 5, 10, 0, 15,
```

```
0, 2, 6, 0, 8, 4, 18, 0])        # 첨가행렬
   print B.rref()                 # RREF
```

```
[1 0 0 4 2 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 1 2 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0]
```

이므로, $x_4 = r$, $x_5 = s$라 하면 이 수반동차연립방정식의 해는 다음과 같다.

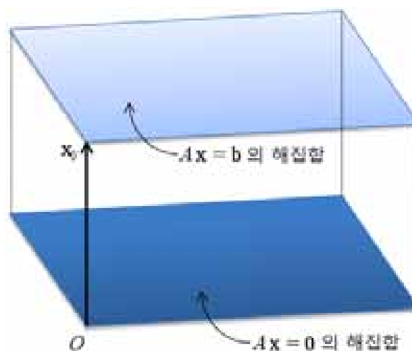
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ■

따라서 선형연립방정식의 해집합은 단순히 수반동차연립방정식의 해공간을 벡터 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$ 만큼 평행이동한 것임을 알 수 있다.

(여기서 이 $\mathbf{x}_0$를 **특수해(particular solution)**라 하며, 이는 선형연립방정식의 해에 $r = s = 0$을 대입하여 구할 수 있다.)

참고 선형연립방정식과 수반동차연립방정식의 해집합 사이의 관계

$A\mathbf{x} = 0$, $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$이면 $A(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}_0 = 0 + \mathbf{b} = \mathbf{b}$이므로 선형연립방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$의 해가 존재하고 W를 $A\mathbf{x} = 0$의 해공간이라 할 때, $\mathbf{x}_0$가 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$를 만족하는 임의의 해라면, $\mathbf{x}_0 + W = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}$는 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$의 해집합이다.



- $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$의 해집합 x_0+W의 기하학적 의미는 $A\mathrm{x}=0$의 해공간 W에 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$의 특수해(particular solution) x_0를 더한 평행이동집합으로 생각할 수 있다. 따라서 x_0+W는 영벡터를 안 가지므로 R^n의 부분공간은 아니다.

정리 3.5.3 [가역행렬의 동치정리]

행렬 A가 n차의 정사각행렬이면, 아래는 동치(equivalent)이다.

(1) $\mathrm{RREF}(A)=I_n$
(2) A는 기본행렬의 곱으로 표현된다.
(3) A는 가역이다.
(4) $A\mathrm{x}=0$은 유일해 0을 갖는다.
(5) $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$는 모든 $\mathrm{b}\in R^n$에 대해 유일해를 갖는다.
(6) A의 열벡터들은 일차독립이다.
(7) A의 행벡터들은 일차독립이다.

참고 $A\mathrm{x}=0$의 해공간의 벡터는 A의 행벡터에 직교한다.

n개의 미지수, 방정식의 개수가 m개인 선형동차연립방정식 $A\mathrm{x}=0$에 대하여 (여기서 A는 $m\times n$의 계수행렬) $A_{(i)}$를 행렬 A의 i번째 행벡터라 하면

$$\begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}\mathrm{x}=\begin{bmatrix} A_{(1)}\cdot\mathrm{x} \\ A_{(2)}\cdot\mathrm{x} \\ \vdots \\ A_{(m)}\cdot\mathrm{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

이므로 만일 x가 $A\mathrm{x}=0$의 해라면 $A_{(i)}\cdot\mathrm{x}=0\ (1\le i\le m)$이다. 즉, $A\mathrm{x}=0$의 해공간들의 벡터들은 모두 행렬 A의 각각의 행벡터들에 직교(orthogonal)인 벡터들이다.

참고 Hyperplane(초평면)

(1) xy−평면의 직선: 선형방정식 $a_1x+a_2y=b$, $(a_1,a_2)\neq(0,0)$의 해집합

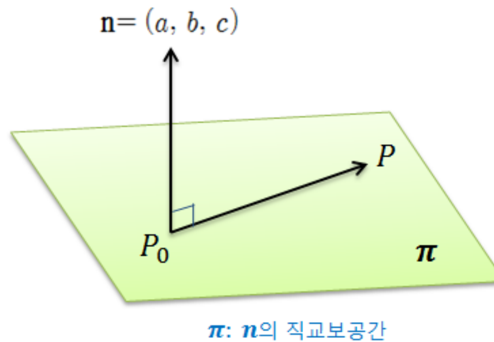
(2) xyz−공간의 평면: 선형방정식 $a_1x+a_2y+a_3z=b$, $(a_1,a_2,a_3)\neq(0,0,0)$의 해집합

(3) R^n 안의 hyperplane(초평면, 超平面): $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$, $\exists\, a_i\neq 0$의 해집합

(여기서 $b=0$인 경우를 원점을 지나는 hyperplane)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=0,\ (\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$$

$\mathbf{a}^{\perp}=\{\mathbf{x}\in R^n \mid \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=0\}$를 $\mathbf{a}$의 orthogonal complement(직교보공간)라 한다.



π: $\mathbf{n}$의 직교보공간



[조선수학사]



[일본의 산사수학]

3.6 특수행렬들(Special matrices)

- 참고 동영상: http://youtu.be/jLh77sZOaM8
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-4-Sec-3-6.html



앞에서 행렬의 연산에 대한 다양한 특성을 보았다. 이 절에서는 자주 이용되는 특수 행렬들(special matrices)을 소개하고 그 행렬이 갖는 주요 성질을 학습한다.

- **대각선행렬(diagonal matrix)**: 주대각선성분 이외의 모든 성분이 0인 정사각행렬

주대각선성분이 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$인 대각선행렬 $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

$$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **단위행렬(identity matrix)**: 주대각선성분이 모두 1인 행렬 I_n

- **스칼라행렬(scalar matrix)**: kI_n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad kI_n = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}$$

예제 1 다음은 모두 대각선행렬이다. 특히, I와 J는 스칼라행렬이다.

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

또 G, H는 $G = \mathrm{diag}(2, -1)$, $H = \mathrm{diag}(-3, -2, 1)$와 같이 나타낼 수도 있다.

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
G=diagonal_matrix([2, −1])          # 대각선행렬 생성
H=diagonal_matrix([−3, −2, 1])      # diagonal_matrix([a1, a2, a3])
print G
print H
```

```
[ 2  0]          [-3  0  0]
[ 0 -1]          [ 0 -2  0]
                 [ 0  0  1]
```
■

예제 2 다음의 행렬을 생각해보자.

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&2\end{bmatrix} \text{이고 } A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix} \text{이면 } DA=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\-3a_{21}&-3a_{22}&-3a_{23}\\2a_{31}&2a_{32}&2a_{33}\end{bmatrix} \text{이다.}$$

즉, 일반적인 행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$에 대하여 DA는 A의 각 행에 D의 대응하는 주대각선성분을 곱하는 결과와 같고, AD는 A의 열에 D에 대응하는 주대각선성분을 곱한 결과와 같다.

더 나아가 아래의 결과를 만족한다.

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ D^5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-243&0\\0&0&32\end{bmatrix},\ D^{-5}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{243}&0\\0&0&\frac{1}{32}\end{bmatrix}$$

즉, 대각선행렬의 거듭제곱은 주대각선성분을 거듭제곱한 대각선행렬과 같다. □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
D=diagonal_matrix([1, -3, 2])          # 대각행렬 생성
print "D^(-1)="
print D^(-1)
print
print "D^5="
print D^5
```

```
D^(-1)=
[   1    0    0]
[   0 -1/3    0]
[   0    0  1/2]

D^5=
[   1    0    0]
[   0 -243    0]
[   0    0   32]
```
■

정의 [대칭행렬과 반대칭행렬]

정사각행렬 A가 $A^T = A$를 만족하면 A를 **대칭행렬**(symmetric matrix)이라 하고, $A^T = -A$를 만족하면 **반대칭행렬**(skew-symmetric matrix)이라고 한다.

예제 3 다음 행렬 중에서 A, I_3는 대칭행렬이고, B는 반대칭행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/3-SO-Symmetric-M.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(3, 3, [1, 2, 3, 2, 4, 5, 3, 5, 6])
B=matrix(3, 3, [0, 1, -2, -1, 0, 3, 2, -3, 0])
print bool(A==A.transpose())          # A가 대칭인지 확인
print bool(-B==B.transpose())         # B가 반대칭인지 확인
```

```
True
True
```



예제 4 A가 임의의 정사각행렬일 때, 다음을 보여라.

(1) $A + A^T$는 대칭행렬이다.

(2) $A - A^T$는 반대칭행렬이다.

풀이 $(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$이므로 $A + A^T$는 대칭행렬이다. 또 $(A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T)$이므로 $A - A^T$는 반대칭행렬이다. ■

참고

임의의 정사각행렬은 대칭행렬과 반대칭행렬의 합으로 유일하게 나타낼 수 있다.

증명 임의의 정사각행렬 A에 대하여 $A+A^T$는 대칭행렬이고 $A-A^T$는 반대칭행렬이며 $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$(대칭행렬과 반대칭행렬의 합)로 표시된다. ■

- **하삼각행렬(lower triangular matrix)**: 주대각선 위의 모든 성분이 0인 정사각행렬

  상삼각행렬(upper triangular matrix): 주대각선 아래의 모든 성분이 0인 정사각행렬

예제 5 일반적인 4×4 삼각행렬은 다음과 같은 형태이다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} : \text{상삼각행렬} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} : \text{하삼각행렬}$$

정리 3.6.1 [삼각행렬의 성질]

A, B를 **하삼각행렬**(lower triangular matrix)이라 하자.

(1) AB는 하삼각행렬(lower triangular matrix)이다.

(2) 만일 A가 가역(invertible)행렬이면 A^{-1}도 하삼각행렬이다.

(3) 만일 모든 i에 대하여 $a_{ii}=1$이면 A^{-1}의 주대각선성분들도 모두 1이다.

예제 6 정사각행렬 A에 대해 $A^k = O$ 되는 양의 정수 k가 존재하면(이때 A를 nilpotent라 부른다) $(I-A)$는 가역행렬이고, $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$이다. 이는

$$(I-A)(I+A+\cdots+A^{k-1}) = I$$

이므로 정의에 따라 쉽게 확인이 가능하다. ■

Chapter 3 연습문제

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm

문제 1 행렬 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\1 & -1 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}$일 때, 다음을 확인하여라.

$A(BC)=(AB)C$

문제 2 행렬 $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\2 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-4 & -3\\0 & -4\end{bmatrix}$일 때, $AB=AC$이지만 $B\neq C$임을 확인하여라.

문제 3 행렬 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & -1\end{bmatrix}$에 대하여 다음을 계산하여라.

$3A^3-2A^2+5A-4I_2$

문제 4 B가 A의 역행렬임을 보여라. 그리고 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$임을 확인하여라.

$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 4 & -3\\3 & 6 & -5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -17 & 11\\-1 & 11 & -7\\0 & 3 & -2\end{bmatrix}$

문제 5 만일 $A^2=A$이면 $(I-2A)=(I-2A)^{-1}$임을 보여라.

문제 6 다음 기본행연산에 대응하는 3×3 기본행렬을 구하여라.

(1) $R_2 \leftrightarrow R_3$

(2) $2R_2 \rightarrow R_2$

(3) $-2R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

문제 7 기본행연산을 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

문제 8 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$이라 하고 A를 임의의 3×3행렬이라 하자.

(1) EA가 어떤 행렬이고 원래 행렬의 행에 어떻게 영향을 미치는지 확인하여라.

(2) AE가 어떤 행렬이고 원래 행렬의 열에 어떻게 영향을 미치는지 확인하여라.

문제 9 다음 집합이 R^2의 부분공간인지를 결정하여라.

$W_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1x_2 = 0\}$

문제 10 다음 집합이 R^3의 부분공간인지를 결정하여라.

$W_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3\}$

문제 11 다음 벡터들에 의해 생성되는 부분공간의 벡터방정식과 매개변수방정식을 구하여라.

(a) $\mathrm{v}_1 = (4,\ -4,\ 2)$, $\mathrm{v}_2 = (-3,\ 5,\ 7)$

(b) $\mathrm{v}_1 = (1,\ 5,\ -1,\ 4,\ 2)$, $\mathrm{v}_2 = (2,\ 2,\ 0,\ 1,\ -4)$

문제 12 다음 연립방정식의 계수행렬의 역행렬을 구하여 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 3x - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = 1 \\ 3x + 5y - 2z = 2 \end{cases}$$

문제 13 다음 동차연립방정식 중 자명하지 않은 해를 갖는 것을 결정하여라.

$$\begin{cases} x + y + z - w = 0 \\ x - y + 2z + w = 0 \\ x - z - 5w = 0 \end{cases}$$

문제 14 다음 행렬이 가역인지 확인하고 가역이면 특수행렬의 성질을 이용하여 역행렬을 구하여라.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

문제 15 특수행렬의 성질을 이용하여 아래 행렬의 곱을 구하여라.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

문제 16 다음 행렬 A가 반대칭행렬(skew-symmetric matrix)이 될 수 있도록 a, b, c, d값을 주어라.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2a & 3a-3b \\ -2 & 0 & 2a-4c \\ -6 & -5 & d \end{bmatrix}$$

문제 P1 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$가 $a_{11}\neq 0$인 2×2 행렬일 때, $\alpha=\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$이라고 놓으면 A는 다음과 같이 두 행렬의 곱으로 표시됨을 보여라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

이때 b의 값은 무엇인가?

문제 P2 정사각행렬 A에 대하여 다음이 왜 성립하는지 설명하여라.

(1) A가 행이나 열 전체가 0인 행이나 열을 포함하면, A는 비가역이다.

(2) A가 똑같은 행이나 열을 포함하면, A는 비가역이다.

(3) 하나의 행 또는 열이 다른 행 또는 열의 상수배로 표현된다면 A는 비가역이다.

문제 P3 A가 $n\times n$인 정사각행렬이다. 이때 $AB=AC\Rightarrow B=C$가 되려면 어떤 조건이 필요할지 토론하여라.

문제 P4 다음을 만족하는 2×2 행렬 A, B를 구하고 기본행연산(ERO)과의 관계를 설명하여라.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

문제 P5 아래 4개의 벡터가 일차독립인지 아닌지를 판단하여라.

$\mathrm{v}_1 = (4,\ -5,\ 2,\ 6)$, $\mathrm{v}_2 = (2,\ -2,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{v}_3 = (6,\ -3,\ 3,\ 9)$, $\mathrm{v}_4 = (4,\ -1,\ 5,\ 6)$

문제 P6 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$와 $A\mathrm{x} = \mathrm{c}$가 해를 가지면 $A\mathrm{x} = \mathrm{b} + \mathrm{c}$도 해를 가짐을 증명하여라.

문제 P7 A는 n차의 가역행렬이다. R^n의 한 벡터 v가 A의 모든 행벡터와 수직이면 v는 무엇인가? 이유를 들어 설명하여라.

문제 P8 대각선행렬이 가역행렬일 필요충분조건은 대각성분이 모두 0이 아니라는 것을 증명하여라.

문제 P9 A가 가역이고 대칭행렬이라면, A^{-1}도 대칭행렬임을 증명하여라.



[International Linear Algebra Society] http://www.ilasic.org/



[유일선] 한국인 최초의 수학전공자(학사)(1904년, 도쿄물리학교)
http://matrix.skku.ac.kr/Series-E/2009/2009-SE-3-LeeSeolHam.pdf

[아서 베커(Arthur L. Becker)] 한국에 온 최초의 교육 (수학)전문가, 연희전문 수물과 초대 학과장(1915년)
http://100.daum.net/encyclopedia/view.do?docid=b09b2368a



[2014 서울 세계수학자대회 포스터] http://www.icm2014.org/kr

Chapter 4

행렬식

4.1 행렬식의 정의와 기본정리
4.2 여인자 전개와 행렬식의 응용
4.3 크래머 공식
4.4 행렬식의 응용
4.5 고유값과 고유벡터

행렬식(determinant)은 행렬보다 무려 150년 전에 생긴 개념으로 우리는 100년 이상 행렬식을 이용하여 연립방정식을 풀어왔습니다. 19세기 후반이 되어서야, Sylvester에 의하여 행렬(Matrix)의 개념이 소개되고 역행렬을 이용하여 방정식을 푸는 방법이 개발된 것인데, 행렬식은 역행렬이 존재하는지 않는지를 알려주기도 합니다. 또한 행렬식은 면적이나 부피, 직선과 평면의 방정식, 외적을 구하는데 이용되며, 벡터의 기하학적 이해에 큰 도움이 됩니다.

이 장에서는 먼저 행렬식을 정의하고 성질을 살펴본 후 여인자 전개를 이용하여 행렬식을 계산하는 방법을 배웁니다. 그리고 행렬식만을 이용하여 선형연립방정식의 해를 구하는 방법인 Cramer의 공식을 배울 것입니다.

선형대수학에서 가장 중요한 개념 중 하나는 행렬의 고유값(Eigenvalue)과 고유벡터(Eigenvector)입니다. 개의 성분을 갖는 대상의 거의 모든 주요 성질을 보존하고 있는 개의 성분, 즉 고유값은 이론적으로 중요할 뿐만 아니라, 미분방정식의 해, 행렬의 거듭제곱을 구할 때와 구글 검색, 이미지 압축 등 행렬과 관계된 모든 곳에 응용됩니다. 이 장 마지막 절에서는 고유값을 행렬식을 이용하여 계산하도록 하겠습니다

선형대수학

4.1 행렬식의 정의와 기본정리

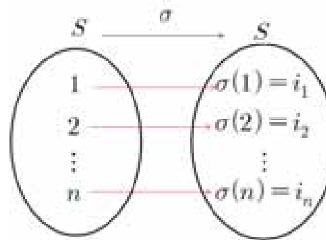
- 참고 동영상: http://youtu.be/Vf8LIkKKHgg http://youtu.be/_3WRlwDUU9Y
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-5-Sec-4-1.html



이 절에서는 임의의 정사각행렬 A에 대하여 어떤 실수 $f(A)$를 대응시키는 함수 중 특히 중요한 행렬식 함수에 관하여 살펴보기로 한다. 행렬식 함수를 정의하기 위하여 먼저 치환(순열)에 관하여 알아보고 행렬식 함수들이 가지는 성질에 대해 알아본다.

정의 [치환]

자연수의 집합 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$의 **치환(permutation, 순열)**이란 S에서 S로의 일대일 대응함수이다.

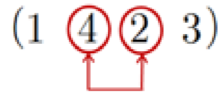


- 앞으로 치환을 간단히 $\sigma=(\sigma(1)\ \ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(n))=(i_1\ \ i_2\ \cdots\ i_n)$로 나타낸다. 치환 σ는 일대일대응이므로 치역 $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$은 $1, 2, \ldots, n$의 숫자를 일렬로 배열하는 것에 지나지 않는다. 따라서 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$의 치환은 모두 $n!$개이다. 집합 S의 모든 치환의 집합을 S_n으로 표시한다.

n	S_n	$n!$
1	(1)	$1!$
2	$(1\ 2)$, $(2\ 1)$	$2!$
3	$(1\ 2\ 3)$, $(2\ 3\ 1)$, $(3\ 1\ 2)$, $(1\ 3\ 2)$, $(2\ 1\ 3)$, $(3\ 2\ 1)$	$3!$
4	$(1\ 2\ 3\ 4)$, $(1,2,4,3)$, ..., $(4,3,2,1)$, $(4\ 3\ 2\ 1)$	$4!$

참고 반전(inversion)

치환 $(j_1 \ \ j_2 \ \cdots \ j_n)$에서 **반전(inversion)**이란 큰 자연수가 작은 자연수보다 더 왼쪽에 먼저 나타나는 경우를 말한다. 예를 들어 아래 그림의 치환 $(1 \ \ 4 \ \ 2 \ \ 3)$에서 4는 2보다 더 왼쪽에 있으므로 $(4 \ \ 2)$에서 반전이 일어났다. 마찬가지로 $(4 \ \ 3)$에서도 반전이 일어났다.



- **j_k에 대한 반전의 개수:** k번째 수 j_k에서 반전이 일어난 경우 j_k보다 작은 수로서 $k+1$번째 이후로 나타난 수의 개수를 **j_k에 대한 반전수**라고 부른다. 위의 예에서 4에 대한 반전수는 2이다. **치환 $(j_1 \ \ j_2 \ \cdots \ j_n)$의 반전수란 각각의 j_k에 대한 반전수를 모두 더한 것이다.**

정의 [짝치환과 홀치환]

치환이 가진 반전의 총 개수가 짝수이면 이 치환은 **짝치환**(even permutation), 홀수이면 **홀치환**(odd permutation)이라고 한다.

예제 1 S_5의 치환 $\sigma = (5 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 4 \ \ 3)$의 반전의 총수를 계산하여 짝치환인지 홀치환인지 결정하여라.

풀이 5를 기준으로 하면 반전의 개수는 4, 1을 기준으로 하면 0개, 2를 기준으로 하면 또 0개, 4를 기준으로 하면 1개, 3은 맨 끝의 원소이므로, 순서대로 반전의 수를 계산하여 더하면 $4+0+0+1+0=5$이므로 홀치환이다. □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/4-TF-Permutation.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
Permutation([5,1,2,4,3]).inversions()        # 반전이 일어난 부분
```

```
[[0, 1], [0, 2], [0, 3], [0, 4], [3, 4]]        # 주의!! index는 0부터 시작
```

```
Permutation([5,1,2,4,3]).number_of_inversions()    # 반전의 개수
```

5

```
Permutation([5,1,2,4,3]).is_even()                 # 짝치환인지 확인
```

False ■

정의 [부호화 함수]

S_n의 각 치환을 $+1$ 또는 -1이라는 수에 대응시키는 **부호화 함수(signature function)** $\text{sgn} : S_n \to \{+1, -1\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & (\sigma : \text{짝치환}) \\ -1 & (\sigma : \text{홀치환}) \end{cases}$$

예제 2 S_3 의 치환들을 짝치환과 홀치환으로 분류하여라.

풀이

치 환	반전의 개수	분 류	부 호
(1 2 3)	0	짝치환	+
(2 3 1)	2 (2 1, 3 1)	짝치환	+
(3 1 2)	2 (3 1, 3 2)	짝치환	+
(1 3 2)	1 (3 2)	홀치환	−
(2 1 3)	1 (2 1)	홀치환	−
(3 2 1)	3 (3 2, 3 1, 2 1)	홀치환	−

■

● 치환에서 두 수의 순서가 바뀌면 부호가 바뀐다.

정리 4.1.1

치환 σ 안의 임의의 두수를 바꾼 치환을 τ라 하면 다음이 성립한다.

$$\operatorname{sgn}(\tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$$

정의 [행렬식] [Leibniz formula]

행렬 $A = [a_{ij}]$가 n차의 정사각행렬일 때, A의 행렬식을 $\det(A)$ 또는 $|A|$로 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

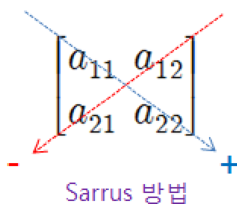
- 정의에 의하여 1차 정사각행렬 $A = [a]$의 행렬식은 $\det(A) = a$이다.
- 행렬식의 각 항 $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$은 행렬 A의 행과 열에서 중복됨 없이 하나씩 뽑아서 곱한 후 대응되는 치환의 부호를 붙인 것이다.



행렬 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$의 $\det(A)$를 구하여라.

풀이

A의 크기가 2×2이므로 $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\} = \{(1\ 2), (2\ 1)\}$이다. 또한
$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$이므로
$\det(A) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$



■

예제 4 행렬 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 의 $\det(A)$를 구하여라.



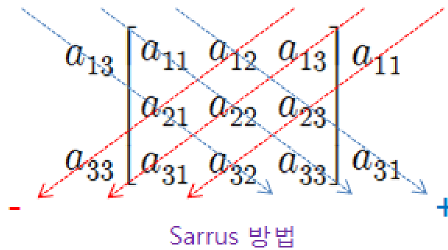
A의 크기가 3×3이므로

$S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} = \{(1\ 2\ 3),\ (2\ 3\ 1),\ (3\ 1\ 2),$
$(1\ 3\ 2),\ (2\ 1\ 3),\ (3\ 2\ 1)\}$이다.

또한 $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = 1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_3) = 1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_4) = -1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_5) = -1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1$ 이므로

이것을 행렬식의 정의에 대입하면,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} a_{3\sigma_1(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} a_{3\sigma_2(3)} \\ &\quad + \cdots + \operatorname{sgn}(\sigma_6) a_{1\sigma_6(1)} a_{2\sigma_6(2)} a_{3\sigma_6(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$



Sarrus 방법

예제 5 다음 행렬의 행렬식을 계산하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$



$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - (1)(4) = -10$

$|B| = \begin{array}{c|ccc|c} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ & -4 & 5 & 6 & \\ 9 & 7 & -8 & 9 & 7 \end{array} = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$ □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/4-B1-Det-matrix.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
B=matrix(QQ, 3, 3, [1, 2, 3, -4, 5, 6, 7, -8, 9])
print B.det()                                   # 행렬식 계산
```

240 ■

참고 Sarrus 방법은 4차 이상의 행렬식에 대해서는 적용할 수 없다.

따라서 4차 이상의 행렬식은 정의에 의해 계산해야 하는데, 이 경우 너무 많은 수의 항과 부호를 결정하여야 한다(실제로 4차의 경우 $4!=24$개의 항, 10차의 경우 $10!=3,628,800$개의 항을 계산해야 함). 따라서 행렬식의 성질을 먼저 알아보고 그 성질들을 이용하여 행렬식을 구하는 것이 더 효율적이다 (정리에 대한 증명은 생략하고 예제를 통해 확인한다).

행렬식의 성질

정리 4.1.2

정사각행렬 A의 행렬식과 A의 전치행렬 A^T의 행렬식의 값은 같다.

예제 6

앞의 예제 5의 행렬 B의 행렬식은 $|B|=240$이고, $B^T=\begin{bmatrix}1&-4&7\\2&5&-8\\3&6&9\end{bmatrix}$이므로

$$|B^T|=\begin{vmatrix}1&-4&7\\2&5&-8\\3&6&9\end{vmatrix}=(45)+(96)+(84)-(105)-(-48)-(-72)=240$$

따라서 $|B|=|B^T|$이다. □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
B=matrix(QQ, 3, 3, [1, 2, 3, -4, 5, 6, 7, -8, 9])
print B.transpose().det()
```

```
240
```

■

● **행에 관한 행렬식의 성질이 열에 관해서도 모두 성립한다.**

정리 4.1.3

행렬 B가 정사각행렬 A의 두 행(열)을 서로 바꾸어서 얻어진 행렬이라면 $|B|=-|A|$이다.

예제 7 행렬 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$일 때, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7$ 이고 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7$ 이므로 $|B|=-|A|$이다. ■

정리 4.1.4

정사각행렬 A의 두 행(열)이 일치하면 $|A|=0$이다.

예제 8 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$일 때,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(0)+(14)+(-6)-(0)-(14)-(-6)=0$$

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ, 3, 3, [1, 2, 3, -1, 0, 7, 1, 2, 3])
print A.det()                                   # 행렬식 계산
```

```
0
```

■

정리 4.1.5

정사각행렬 A의 한 행(열)의 성분이 모두 0이면 $|A|=0$이다.

예제 9

행렬 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\0&0&0\end{bmatrix}$의 $|A|$를 계산하면 다음과 같다.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\0&0&0\end{vmatrix}$$
$$=1\times5\times0+2\times6\times0+3\times4\times0-2\times4\times0-3\times5\times0-1\times6\times0=0$$

■

정리 4.1.6

정사각행렬 A의 한 행을 k배하여 얻어진 행렬을 B라 하면 $|B|=k|A|$이다.

예제 10

행렬 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&5&3\\2&8&6\end{bmatrix}$의 행렬식을 계산하면 다음과 같다.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&5&3\\2&8&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3\\1&5&3\\1&4&3\end{vmatrix}=(2)(3)\begin{vmatrix}1&2&1\\1&5&1\\1&4&1\end{vmatrix}=(2)(3)(0)=0$$

■

정리 4.1.7

정사각행렬 A의 두 행이 비례하면 $|A|=0$이다.

정리 4.1.8

정사각행렬 A의 한 행의 k배를 다른 행에 더하여 얻어진 행렬을 B라 하면 $|B|=|A|$이다.

예제 11

행렬 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 의 2행을 2배하여 1행에 더한 행렬을 B라 하면

$$B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 9\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2\cdot 2 & 2+2(-1) & 3+2\cdot 3\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ 이므로

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$ 이다. $|A|$, $|B|$를 각각 계산하면

$|A|=4=|B|$ 이다. 

정리 4.1.9

$A=[a_{ij}]$가 n차의 삼각행렬이면 A의 행렬식은 주대각선성분의 곱과 같다. 즉,

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

예제 12

앞의 정리에 의하여 $\begin{vmatrix}2 & 7 & -3 & 8 & 3\\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=(2)(-3)(6)(9)(4)=-1296$ 

참고 행렬식을 계산하는 방법

1. 기본행연산을 활용하여 행렬식의 한 행(열)에 0이 많이 나타나도록 한다(RREF).
2. 대각선 성분을 곱한다.

※ 기본행연산 중에 상수배나 행(열)을 교환하는 경우는 상수배의 역수와 -1배를 다시 반영하여 곱해주는 것을 빠뜨리지 않도록 주의해야 한다.

예제 13 다음 행렬 A 의 행렬식을 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$



$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$=-3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \qquad (-2)R_1+R_3$$

$$=-3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \qquad (-10)R_2+R_3$$

$$=(-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-3)(-55)(1)\ =165$$



정리 4.1.10

E가 n차의 기본행렬(Elementary matrix)이라고 하자. 그러면 $\det(EA)=\det(E)\det(A)$를 만족한다.

참고 기본행렬의 행렬식

1. E가 I_n의 한 행에 k $(k \neq 0)$를 곱한 것이면 $\det E=k$
2. E가 I_n의 두 행을 서로 바꾼 것이면 $\det E=-1$
3. E가 I_n의 한 행에 k배하여 다른 행에 더한 것이면 $\det E=1$
4. A는 $n\times n$행렬이고 E는 기본행렬이다. 그러면, $\det(EA)=\det E \cdot \det A$이다.

가역행렬의 동치조건

정리 4.1.11

A가 가역행렬일 필요충분조건은 $\det A \neq 0$이다.

정리 4.1.12

두 행렬 A, B가 n차의 정사각행렬일 때, $|AB|=|A||B|$이 성립한다.

예제 14 행렬 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}$에 대하여 위의 정리를 확인하여라.

풀이 $AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\10&5\end{bmatrix}$이고,

$|A|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2$, $|B|=\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5$, $|AB|=\begin{vmatrix}4&3\\10&5\end{vmatrix}=-10$

이므로 $|AB|=-10=|A||B|$이다. □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ, 2, 2, [1, 2, 3, 4])
B=matrix(QQ, 2, 2, [2, -1, 1, 2])
C=A*B
print "det(AB)=", C.det()
print "det(A)*det(B)=", A.det()*B.det()
```

```
det(AB)= -10
det(A)*det(B)= -10
```
■

정리 4.1.13

행렬 A가 가역이면 $|A|\neq 0$이고, $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$이 성립한다.

예제 15 행렬 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$에 대하여 위의 정리를 확인하여라.

풀이 A는 가역이고 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$이므로 $|A|=-2\neq 0$이다.

$\therefore\ |A^{-1}|=-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{|A|}$ □

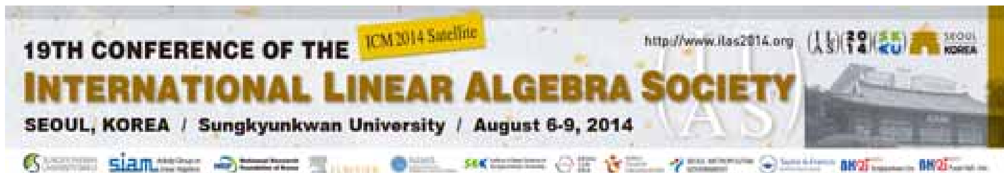
Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ, 2, 2, [1, 2, 3, 4])
Ai=A.inverse()
print "det(A)=", A.det()
print "det(A^(-1))=", Ai.det()
```

```
det(A)= -2
det(A^(-1))= -1/2
```
■



[제19차 국제선형대수학회(성균관대, 2014년 8월 6~9일)] http://www.ilas2014.org/



사진과 동영상: http://matrix.skku.ac.kr/2014-Album/ILAS-2014/

4.2 여인자 전개와 행렬식의 응용

- 참고 동영상: http://youtu.be/m6l2my6pSwY
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-5-Sec-4-2.html



이 절에서는 행렬식을 직접 계산하는 데 편리하고 이론적으로도 중요한 방법을 알아본다. 그리고 이 방법의 응용으로 역행렬을 계산하는 쉬운 공식을 소개한다.

정의 [소행렬식과 여인자]

정사각행렬 $A=[a_{ij}]$의 i행과 j열을 제거하여 만든 부분행렬을 $A(i|j)$라 하고 그의 행렬식 $M_{ij}=\det A(i|j)$를 A의 a_{ij}에 대한 **소행렬식(minor)**이라 한다. 또, $A_{ij}=(-1)^{i+j}|A(i|j)|=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 를 A의 a_{ij}에 대한 **여인자(cofactor)**라고 한다.

예제 1 행렬 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\\ 1 & 4 & 8\end{bmatrix}$이라 할 때, A의 a_{11}에 대한 소행렬식과 여인자를 구하여라.

풀이

A의 a_{11}에 대한 소행렬식은 $M_{11}=\det A(1|1)=\begin{vmatrix}3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\\ 1 & 4 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 4 & 8\end{vmatrix}=16$이고, a_{11}에 대한 여인자는 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=16$. ■

정의 [수반행렬]

n차의 정사각행렬 $A=[a_{ij}]$의 성분 a_{ij}에 대한 여인자를 A_{ij}라 할 때, 행렬 $[A_{ij}]^T$를 A의 **수반행렬(adjoint matrix)**이라 하고, $\operatorname{adj} A$로 나타낸다. 즉,

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}^T=[A_{ij}]^T$$

예제 2 다음 행렬의 adj A를 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix}3&-2&1\\5&6&2\\1&0&-3\end{bmatrix}$$

풀이

행렬 A의 각 성분에 대한 여인자는 각각 다음과 같다.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6&2\\0&-3\end{vmatrix}=-18 \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&2\\1&-3\end{vmatrix}=17$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&6\\1&-0\end{vmatrix}=-6 \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&1\\0&-3\end{vmatrix}=-6$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&1\\1&-3\end{vmatrix}=-10 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&-2\\1&0\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2&1\\6&2\end{vmatrix}=-10 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&-2\\5&6\end{vmatrix}=28$$

$$\therefore \ \text{adj}\,A=\begin{bmatrix}-18&-6&-10\\17&-10&-1\\-6&-2&28\end{bmatrix}$$ □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/4-MA-adjoint.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ, 3, 3, [3, -2, 1, 5, 6, 2, 1, 0, -3])
print A.adjoint()                              # 수반행렬
```

```
[-18  -6 -10]
[ 17 -10  -1]
[ -6  -2  28]
```
■

여인자 전개

3차의 정사각행렬 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$의 행렬식은 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{21}(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\\ &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}\end{aligned}$$

(1열의 원소에 관하여)

이를 행렬 A의 1열에 관한 (Laplace) **여인자 전개(cofactor expansion)**라 한다.

여인자 전개는 임의의 열에 대하여도 성립하며, 임의의 행에 대하여도 유사한 전개식이 성립한다.

임의의 3차의 정사각행렬 $A=[a_{ij}]$에 대하여 다음이 성립한다. 즉,

$$A \cdot \text{adj}\, A = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{2k} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{3k} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2k}A_{1k} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}A_{2k} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}A_{3k} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{3k}A_{1k} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}A_{2k} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}A_{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \cdot I_3$$

이것으로부터 $\sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A| & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ 임을 알 수 있다.

앞서 예제 2의 경우

Sage연산 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ, 3, 3, [3, -2, 1, 5, 6, 2, 1, 0, -3])
print "det(A)=", A.det()
print "A*adj(A)="
print A*A.adjoint()
```

```
det(A)= -94
A*adj(A)=
[-94   0   0]
[  0 -94   0]
[  0   0 -94]
```

■

따라서 다음이 성립한다.

정리 4.2.1 [여인자 전개]

A가 n차의 정사각행렬일 때 i, j $(1 \le i, j \le n)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i\text{행에 관한 여인자 전개})$$
$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j\text{열에 관한 여인자 전개})$$

- **행렬식의 계산에서 기본행연산과 0을 많이 포함하고 있는 행(열)의 여인자 전개를 적절히 사용하는 것이 바람직하다.**

예제 3 다음 행렬의 행렬식을 여인자 전개를 이용하여 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

풀이

2행의 (-2)배를 3행에 더하고, 2행의 (-3)배를 1행과 4행에 각각 더하면

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

이것을 1열에 관하여 여인자 전개를 하면

$$|A| = 0 + (1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0$$
$$= (-1)\,[0 + 0 + 3 - 9 + 24 - 0] \; = \; -18.$$

■

정리 4.2.2 [수반행렬을 이용한 가역행렬의 역행렬]

n차의 정사각행렬 A가 가역일 때, A의 역행렬은 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$이다.

예제 4 예제 2의 행렬 A의 역행렬을 구하여라.

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(QQ, 3, 3, [3, -2, 1, 5, 6, 2, 1, 0, -3])
dA=A.det()                          # 행렬식 계산
adjA=A.adjoint()                      # 수반행렬 계산
print "(1/dA)*adjA="
print (1/dA)*adjA                    # 역행렬 계산
print
print "A^(-1)="
print A.inverse()                    # 직접 구한 역행렬과 비교
```

```
(1/dA)*adjA=
[  9/47   3/47   5/47]
[-17/94   5/47   1/94]
[  3/47   1/47 -14/47]

A^(-1)=
[  9/47   3/47   5/47]
[-17/94   5/47   1/94]
[  3/47   1/47 -14/47]
[  3/47   1/47 -14/47]
```
■

Augment the
Teaching of
Linear
Algebra through the use of
Software
Tools

[ATLAST project] http://www1.umassd.edu/SpecialPrograms/Atlast/

4.3 크래머 공식

- 참고 동영상: http://youtu.be/m2NkOX7gE50
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-6-Sec-4-3.html



선형연립방정식의 해를 구하는 공식을 만들면 실제 계산은 복잡하더라도 해의 성질을 조사할 때는 매우 유용하다. 이제 n개의 미지수를 가지는 n개의 선형방정식으로 이루어진 연립방정식의 해를 구하는 크래머 공식(Cramer’s rule)을 소개한다.

크래머 공식은 미지수와 방정식의 개수가 같은 선형연립방정식에 대하여 적용된다.

정리 4.3.1 [크래머 공식]

선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

의 계수행렬을 A라 하고, $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$이라 하면, 이 연립방정식은 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$로 나타낼 수 있다. 이때, $|A| \neq 0$이면 이 연립방정식은 유일한 해

$x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|}$, ... , $x_n = \dfrac{|A_n|}{|A|}$을 갖는다.

여기서 A_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$는 A의 j열을 b로 바꾼 행렬이다.

증명 $|A| \neq 0$이므로 A는 가역이다. 따라서 연립방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$는 유일한 해 $\mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b}$를 갖는다. 그런데 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}\, A$이므로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}\,A\right)\mathrm{b} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \cdots & A_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

따라서 x의 j행의 성분은 $x_j = \dfrac{b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}}{|A|}$ 이다. 그런데

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=|A|$$

이므로 A의 j열을 b로 바꾼 행렬을 A_j라 하면 다음을 얻는다.

$$x_j=\frac{|A_j|}{|A|}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$ ■

예제 1 크래머 공식을 이용하여 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{aligned} -2x_1+3x_2-x_3 &= 1 \\ x_1+2x_2-x_3 &= 4 \\ -2x_1-x_2+x_3 &= -3 \end{aligned}$$

풀이

계수행렬을 A 라 하면

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2,\ |A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-6,\ |A_3|=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-8$$ 이므로

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-4}{-2}=2,\ x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-6}{-2}=3,\ x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{-8}{-2}=4$$ ■

예제 2 크래머 공식을 이용하여 다음 동차연립방정식을 풀어라.

$$\begin{aligned} -2x_1+3x_2-x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2-x_3 &= 0 \\ -2x_1-x_2+x_3 &= 0 \end{aligned}$$

풀이

예제 1에서 $|A|=-2$이고, 행렬 $A_1,\ A_2,\ A_3$는 모두 0인 열을 포함하고 있으므로 $|A_1|=|A_2|=|A_3|=0$, 따라서 구하는 해는 $x_1=x_2=x_3=0$ 이다. ■



정리 4.3.2 [가역행렬의 동치정리](행렬식과의 관계 포함)

A 가 n 차의 정사각행렬일 때, 다음은 동치이다(TFAE).

(1) A 는 가역이다.

(2) 임의의 n차원 벡터 $\mathbf{b}$ 에 대하여 선형연립방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 가 유일한 해를 갖는다.

(3) 동차선형연립방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 이 자명한 해만 갖는다.

(4) A 와 I_n 은 행동치이다.

(5) $|A| \neq 0$



위의 정리는 동치 조건이 계속 늘어난다. 동치 조건이 10개가 넘는 7.4절 정리 7.4.9 [가역행렬의 동치정리]의 증명을 이용하면 된다.









[대한수학회-미국수학회 공동학술회의] Combinatorial Matrix Theory
http://matrix.skku.ac.kr/conference/2009-KMS-AMS-CMTSession/

4.4 *행렬식의 응용

● 참고 동영상: http://youtu.be/KtkOH5M3_Lc
● 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-6-Sec-4-4.html



행렬식의 개념을 처음 소개한 것은 1683년 일본의 세키 고와(Takakazu Seki-Kowa)이다. 행렬식(determinant)의 어원은 해의 존재성을 판별한다는 의미에서 유래되었으며, 현재 의미로 행렬식을 사용한 것은 1815년 코시였다. 이 절에서는 행렬식의 무수히 많은 응용 중 기하학적 응용과 대수학적 응용의 몇 가지를 소개한다.

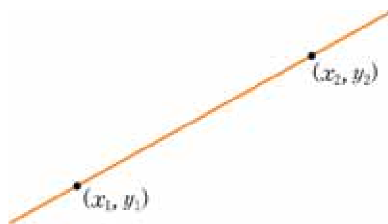
행렬식을 이용하면 넓이나 부피, 직선의 방정식, 타원의 방정식, 평면의 방정식을 쉽게 구할 수 있다. 또 Vandermonde 행렬의 행렬식은 통계자료와 실험실에서 나오는 이산적인 데이터에 여러분이 12년간 배운 연속함수를 다루는 수학을 연결시켜주는 다리이다(interpolation).

예제 1 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같음을 보여라.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

풀이

먼저 위 식은 x와 y에 대한 일차식이다. 위 식에 $x = x_1$, $y = y_1$ 와 $x = x_2$, $y = y_2$ 를 대입하면 등식이 성립하므로 위 식은 두 점을 지나는 직선의 방정식이다.

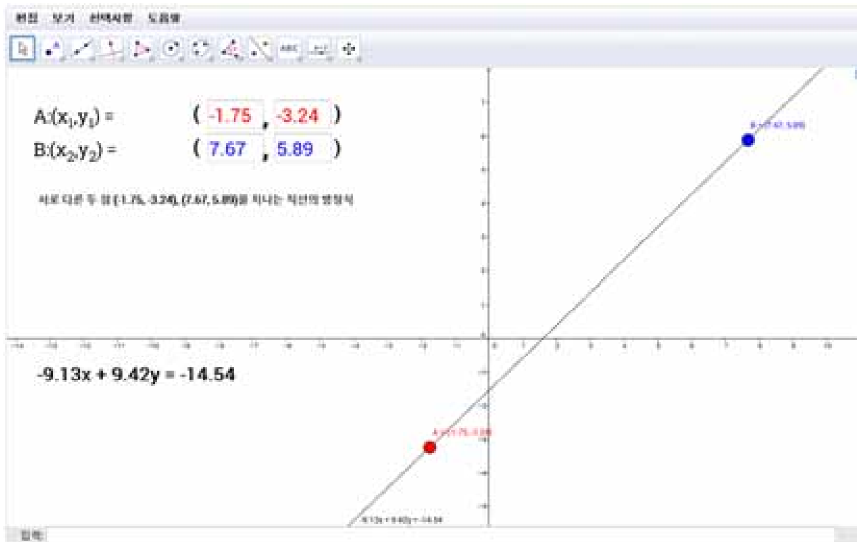


$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$



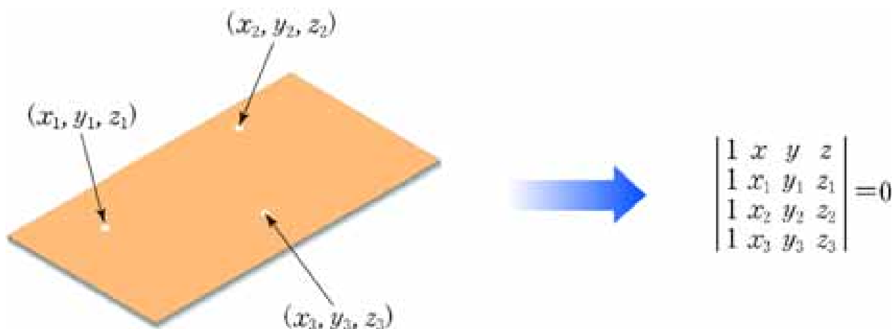
참고 컴퓨터 시뮬레이션

[서로 다른 두 점을 지나는 직선의 방정식]
http://www.geogebratube.org/student/m9504



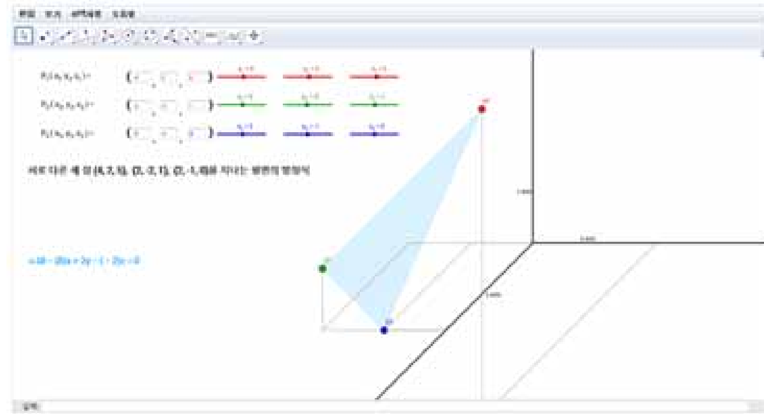
예제 1 에서와 마찬가지로 서로 다른 세 점 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)를 지나는 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$



참고 컴퓨터 시뮬레이션

[서로 다른 세 점을 지나는 평면의 방정식]
http://www.geogebratube.org/student/m56430

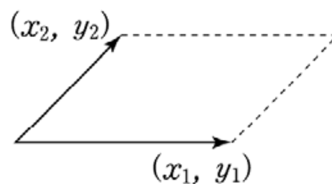


- 이제 임의의 정사각 행렬 $A \in M_n$을 생각해보자. 여기의 i번째 열을 $A^{(i)}$라 하고

$$P(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i A^{(i)} : 0 \le t_i \le 1,\ i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

이라고 하면 $n=2$인 경우에는 **평행사변형(parallelogram)**이고, $n \ge 3$인 경우에는 일반화된 **평행육면체(parallelepiped)**가 된다.

- 평행사변형은 두 벡터의 합을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.



위의 평행사변형의 넓이는 $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$으로 이는 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$의 절대값과 같다. 마찬가지로 평행육면체는 한 평면 위에 있지 않은 세 개의 벡터에 의해 생성되며 이들 세 개의 벡터를 열벡터로 하는 행렬을 A라 하면 평행육면체의 부피는 $\det(A)$의 절대값과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

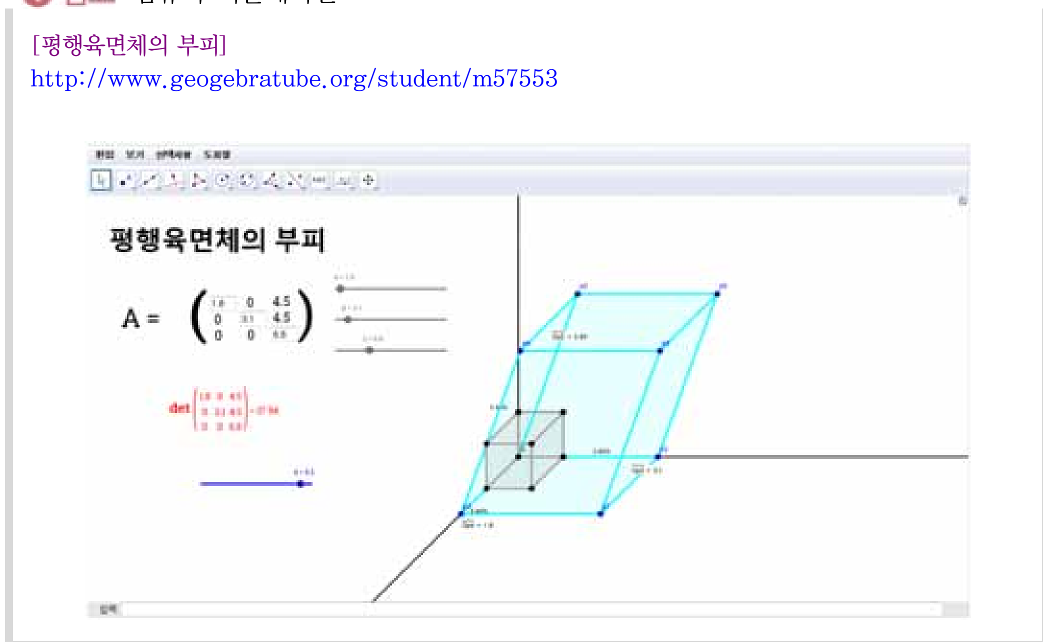
$c1 \quad c2 \quad c3$

$c1(1, 1, 2)$ $c3(-1, 2, 2)$ $c2(0, 2, 1)$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[평행육면체의 부피]
http://www.geogebratube.org/student/m57553



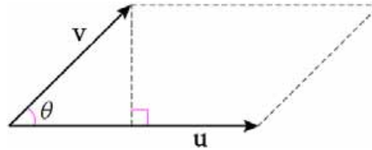
정리 4.4.1

(1) A가 2차 정사각행렬이면 $|\det(A)|$는 행렬 A의 두 개의 열벡터에 의해서 결정되는 평행사변형의 넓이와 같다.

(2) A가 3차 정사각행렬이면 $|\det(A)|$는 행렬 A의 세 개의 열벡터에 의해서 결정되는 평행육면체의 부피와 같다.

(3) 두 벡터 $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in R^n$가 만드는 평행사변형의 넓이는 $A = [\mathrm{u} : \mathrm{v}]$라 할 때, $\sqrt{\det A^T A}$ 이다.

증명 여기서는 (3)만 증명하도록 한다.



위의 그림에서 $|\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}|^2=\|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2\cos^2\theta$라는 사실은 이미 알고 있다.
또, 위 평행사변형의 넓이는 $\|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|\sin\theta$이다. 이제 행렬식을 계산해보면,

$$\begin{aligned}\det A^TA &= \det\begin{bmatrix}\mathrm{u}^T\mathrm{u} & \mathrm{u}^T\mathrm{v}\\ \mathrm{v}^T\mathrm{u} & \mathrm{v}^T\mathrm{v}\end{bmatrix}=\|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2-\mathrm{u}^T\mathrm{v}\mathrm{v}^T\mathrm{u}\\ &=\|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2-(\mathrm{v}^T\mathrm{u})^T(\mathrm{v}^T\mathrm{u})=\|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2-|\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}|^2\\ &=\|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2-\|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2\cos^2\theta\\ &=\|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2(1-\cos^2\theta)=\|\mathrm{u}\|^2\|\mathrm{v}\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$ (밑변과 높이를 곱한 값의 제곱)

이므로 $\mathrm{u},\mathrm{v}\in R^n$가 만드는 평행사변형 넓이의 제곱이 됨을 쉽게 알 수 있다. ■

예제 2

세 벡터 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)가 만드는 삼각형의 넓이는 다음과 같음을 보여라.

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}\right|$$

풀이

두 벡터 (x_2-x_1, x_3-x_1)과 (y_2-y_1, y_3-y_1)이 만드는 평행사변형의 절반인 삼각형을 원점으로 평행이동하여도 넓이는 변하지 않으므로 위 정리의 (3)을 이용하면 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}x_2 & y_1 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}\right|$$ ■

Vandermonde 행렬과 행렬식

xy-평면상에 x좌표가 서로 다른 n개의 점이 있으면 이들 n개의 점을 모두 지나는 $n-1$차 다항식이 유일하게 결정된다. 이를 결정해보자.

- (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_n, y_n)을 xy-평면상의 x좌표가 서로 다른 n개의 점이라 하자. 우리는 이들 n개의 점을 지나는 $n-1$차 다항식

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

을 결정할 것이다. 이들 n개의 점이 주어진 식을 만족하므로

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} &= y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} &= y_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} &= y_n \end{aligned}$$

을 만족한다. 여기에서 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 서로 다르므로 계수행렬식은

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

이고 계수행렬 V_n을 n차 **Vandermonde 행렬**이라 한다. 이제 Vandermonde 행렬의 행렬식을 계산하는 방법을 살펴보자. 간단하게 $n=3$인 경우,

$$\det V_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \det(V_3^T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

$$\therefore \ |V_3| = \prod_{1 \le i < j \le 3} (x_j - x_i).$$

- 위의 경우에서 보듯이 n차 Vandermonde 행렬 V_n의 행렬식은 같은 방법으로 $(x_j - x_i)$들의 곱의 형태(단, $i < j$)임을 알 수 있다. 즉,

$$\det V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

참고 http://www.proofwiki.org/wiki/Vandermonde_Determinant

예제 3 3개의 점 (39, 34), (99, 47), (38, 58)을 지나는 그래프를 Vandermonde 행렬을 이용하여 구하여라.

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

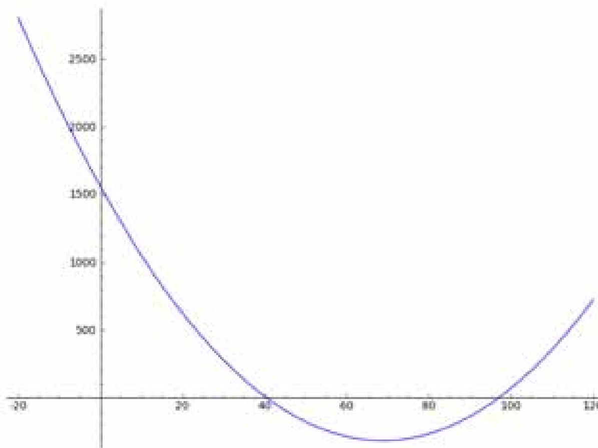
```
def Vandermonde_matrix(x_list):            # Vandermonde 행렬 생성
    n=len(x_list)
    A=matrix(RDF, n, n, [[z^i for i in range(n)] for z in x_list])
    return A

x_list=[39, 99, 38]                        # x 좌표
V=Vandermonde_matrix(x_list)
y_list=vector([34, 47, 58])                # y 좌표
print "V="
print V
print
print "x=", V.solve_right(y_list)
```

```
V=
[   1.0   39.0 1521.0]
[   1.0   99.0 9801.0]
[   1.0   38.0 1444.0]

x= (1558.34590164, -54.568579235, 0.396994535519)
```

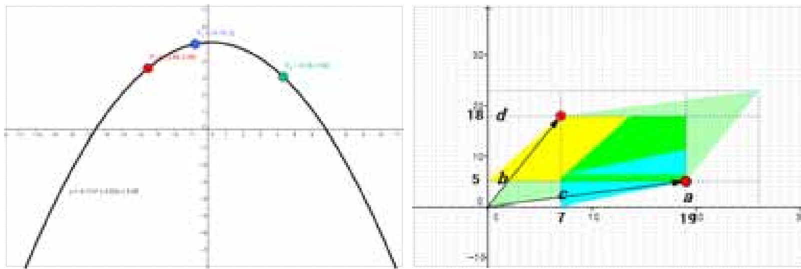
```
p=0.396994535519*x^2 -54.568579235*x + 1558.34590164
plot(p, (x, -20, 120))              # 그래프 그리기
```



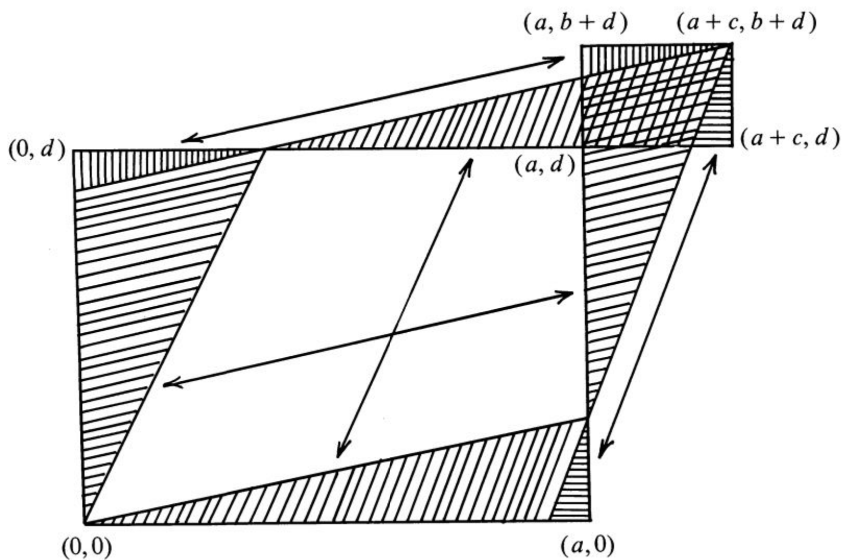
■

참고 시뮬레이션

[Curve Fitting(근사곡선)] http://www.geogebratube.org/student/m9911
[평행사변형의 넓이] http://www.geogebratube.org/student/m113



Proof without words:
A 2 × 2 determinant is the area of a parallelogram



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \left\| \Box \right\| - \left\| \Box \right\| = \left\| \text{▱} \right\|$$

[Solomon W. Golomb(Mathematics Magazine, March 1985)]

4.5 고유값과 고유벡터

- 참고 동영상: http://youtu.be/96Brbkx1cQ4
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/CLA-Week-6-Sec-4-5.html



n차의 정사각행렬 A와 $\mathbf{x} \in R^n$에 대하여 $A\mathbf{x}$도 R^n의 한 벡터이다. 이때 많은 응용문제에서 제기되는 중요한 질문 중의 하나는 "$A\mathbf{x}$가 $\mathbf{x}$와 평행이 되게 하는 영 아닌 벡터 $\mathbf{x}$가 존재하는가?" 하는 문제인데, 이와 같은 고유벡터는 선형변환과 관계되어 많은 중요한 역할을 한다. 이 절에서는 고유벡터와 고유값에 대하여 알아본다.

정의 [고유값과 고유벡터]

A를 n차의 정사각행렬이라 하자. 0 아닌 벡터 $\mathbf{x} \in R^n$가 적당한 스칼라 λ에 대하여 다음을 만족하면 λ를 A의 **고유값(eigenvalue)**이라 하고, $\mathbf{x}$를 λ에 대응하는 A의 **고유벡터(eigenvector)**라고 한다.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

예제 1 만일 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$라면 $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$이다. 따라서 고유값은 3이고, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$는 3에 대응하는 고유벡터이다. ■

예제 2 임의의 $\mathbf{x} \in R^n$에 대하여 $I_n\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$이므로 항등행렬 I_n의 고유값은 $\lambda = 1$ 하나뿐이고 모든 영 아닌 벡터 $\mathbf{x} \in R^n$는 고유값 1에 대응하는 I_n의 고유벡터이다. ■

- $\mathbf{x} \in R^n$가 고유값 λ에 대응하는 A의 고유벡터이면 영 아닌 임의의 스칼라 k에 대하여 $k\mathbf{x}$도 λ에 대응하는 A의 고유벡터가 된다.

$$A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x} \Rightarrow A(k\mathrm{x}) = k(A\mathrm{x}) = k(\lambda \mathrm{x}) = \lambda(k\mathrm{x})$$

고유값을 구하는 일반적인 방법

$$A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x} \Leftrightarrow A\mathrm{x} = \lambda I_n \mathrm{x} \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)\mathrm{x} = 0$$

이고, 또한 $\mathrm{x} \neq 0$ 이므로 동차연립방정식 $(\lambda I_n - A)\mathrm{x} = 0$ 은 0 아닌 해를 가져야 한다. 따라서 **특성방정식(characteristic equation)** $|\lambda I_n - A| = 0$이 성립해야 한다. $f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$는 **특성다항식(characteristic polynomial)**이라 한다.

정리 4.5.1

A가 $n \times n$행렬이고 λ가 스칼라이면 다음의 명제는 동치이다.

(1) λ는 A의 고유값이다.
(2) λ는 특성방정식 $\det(\lambda I_n - A) = 0$의 해가 된다.
(3) 동차선형연립방정식 $(\lambda I_n - A)\mathrm{x} = 0$은 자명하지 않은 해도 가진다.

예제 3 행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$의 고유값과 고유벡터를 모두 구하여라.

풀이

만일 벡터 $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$에 대하여 $A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}$를 만족한다고 하자. 그러면

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 5x_1 - 6x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 = \lambda x_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (\lambda - 5)x_1 + 6x_2 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda + 2)x_2 = 0 \end{matrix} \qquad (1)$$

그런데 앞서 언급한 대로 이 동차연립방정식은 자명한 해(0)를 제외한 무수히 많은 해를 가져야 하므로

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$\therefore \lambda = 1,\ 2$

① $\lambda_1 = 1$에 대응하는 고유벡터를 구해보자.

(1)로부터 $\begin{matrix} -4x_1 + 6x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x_1 - \frac{3}{2}x_2 = 0$

$\therefore$ x$=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3s \\ 2s \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(s \in R \setminus \{0\})$

② $\lambda_2 = 2$에 대응하는 고유벡터를 구해보자.

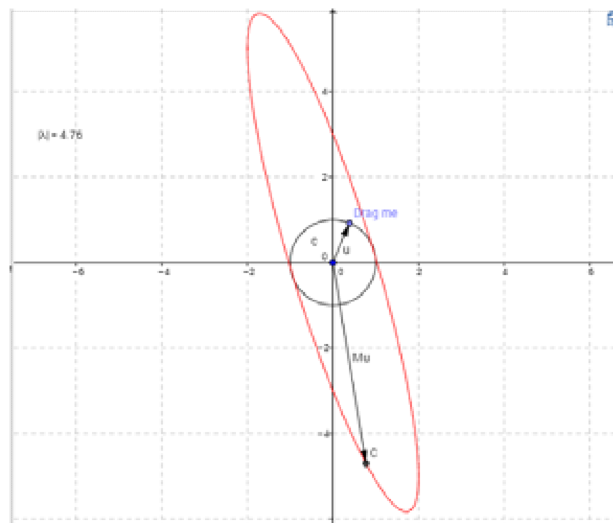
(1)로부터 $\begin{matrix} -3x_1+6x_2=0 \\ -2x_1+4x_2=0 \end{matrix} \Leftrightarrow x_1-2x_2=0$

$\therefore$ x $=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \in R \setminus \{0\})$ ■

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[고유값과 고유벡터를 시각적으로 살펴보기]

http://www.geogebratube.org/student/b73259#material/11114



● 행렬의 고유값은 항상 존재하는가?

정리 4.5.2 [대수학의 기본정리]

실수(혹은 복소수)계수를 갖는 모든 n차 다항식

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

은 복소평면에서 $p(x) = 0$을 만족하는 n개의 근 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$를 갖는다.

- 즉, n차의 정사각실수행렬 A의 n개의 고유값은 복소수 범위에서는 항상 존재함을 알 수 있다. 그러나 본 강의에서는 스칼라를 실수로 제한하므로 고유값이 없다고 하는 경우는 실수 범위에서는 없다는 의미이다.

예제 4 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$의 고유값과 고유벡터를 구하여라.

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/4-BN-char_ploy.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

① A의 특성다항식은

```
A=matrix(QQ, 2, 2, [1, -3, -3, 1])    # A 입력
print A.charpoly()                  # A의 특성방정식
```

```
x^2 - 2*x - 8
```

② 따라서 고유값은 다음과 같다.

```
solve(x^2 - 2*x - 8==0, x)
```

```
[x == -2, x == 4]
```

③ 명령어를 이용하여 고유값을 바로 계산할 수도 있다.

```
A.eigenvalues()              # A의 고유값
```

```
[4, -2]
```

④ $\lambda = -2$일 때 고유벡터를 계산하기 위해 $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = 0$를 풀면

```
(-2*identity_matrix(2)-A).echelon_form()  # 동차이므로 계수행렬만 고려한다.
```

```
[ 1 -1]
[ 0  0]
```

따라서 $x_1 - x_2 = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\; (s \in R \setminus \{0\})$

⑤ $\lambda = 4$일 때 고유벡터를 계산하기 위해 $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = 0$를 풀면

```
(4*identity_matrix(2)-A).echelon_form()   # 동차이므로 계수행렬만 고려한다.
```

```
[ 1  1]
[ 0  0]
```

따라서 $x_1 + x_2 = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\; (t \in R \setminus \{0\})$

⑥ 명령어를 이용하여 고유벡터를 바로 계산할 수도 있다.

```
A.eigenvectors_right()
```

```
[(4, [(1, -1)], 1), (-2, [(1, 1)], 1)]
        # [고유값, 대표되는 고유벡터(다를 수 있다), 중복도]
```
■

예제 5

행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$의 고유값과 고유벡터를 구하여라.

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/4-VT-eigenvalues.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

① A의 특성다항식은

```
A=matrix(QQ, 3, 3, [1, 2, 2, 1, 2, -1, 3, -3, 0])  # A 입력
```

```
print A.charpoly()                    # A의 특성방정식
```

```
x^3 - 3*x^2 - 9*x + 27
```

② 따라서 고유값은 다음과 같다.

```
solve(x^3 - 3*x^2 - 9*x + 27==0, x)
```

```
[x == -3, x == 3]
```

③ 명령어를 이용하여 고유값을 바로 계산할 수도 있다.

```
A.eigenvalues()             # A의 고유값
```

```
[-3, 3, 3]                 # 중근까지 표시
```

④ $\lambda=-3$일 때 고유벡터를 계산하기 위해 $(\lambda I_3-A)\mathbf{x}=0$를 풀면

```
(-3*identity_matrix(3)-A).echelon_form()  # 동차이므로 계수행렬만 고려한다.
```

```
[  1    0  2/3]
[  0    1 -1/3]
[  0    0    0]
```

따라서 $\begin{aligned} x_1+\frac{2}{3}x_3=0 \\ x_2-\frac{1}{3}x_3=0 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{x}=\begin{bmatrix} -2r \\ r \\ 3r \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (r\in R\setminus\{0\})$

⑤ $\lambda=3$일 때 고유벡터를 계산하기 위해 $(\lambda I_3-A)\mathbf{x}=0$를 풀면

```
(3*identity_matrix(3)-A).echelon_form()   # 동차이므로 계수행렬만 고려한다.
```

```
[ 1 -1 -1]
[ 0  0  0]
[ 0  0  0]
```

따라서 $x_1-x_2-x_3=0 \Rightarrow \mathbf{x}=\begin{bmatrix} s+t \\ s \\ t \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(단, s와 t는 동시에 0은 아닌 실수)

⑥ 명령어를 이용하여 고유벡터를 바로 계산할 수도 있다.

```
A.eigenvectors_right()
```

[(−3, [(1, −1/2, −3/2)], 1), (3, [(1, 0, 1),(0, 1, −1)], 2)]
[고유값, 대표되는 고유벡터(다를 수 있다), 중복도] ■

n차 삼각행렬 $T=[t_{ij}]$에 대하여 $\lambda I-T$의 주대각선성분은 $\lambda-t_{ii}(i=1, 2, \ldots, n)$이다. 따라서 T의 특성다항식은 $\det(\lambda I-T)=(\lambda-t_{11})(\lambda-t_{22})\cdots(\lambda-t_{nn})$이므로 삼각행렬 T의 모든 고유값은 T의 주대각선성분인 $t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{nn}$임을 알 수 있다.

예제 6 삼각행렬 $T=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$의 특성다항식과 모든 고유값을 구하여라.



$\det(\lambda I-T)=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-3)$이므로 T의 모든 고유값은 $-1, 2, 3$이다. ■

정의 [고유공간(eigenspace)]

λ가 n차의 정사각행렬 A의 고유값일 때, 동차연립방정식 $(\lambda I_n-A)\mathbf{x}=0$의 해공간을 λ에 대응하는 A의 **고유공간(eigenspace)**이라고 한다.

- 즉, λ에 대응하는 A의 고유공간은 λ에 대응하는 A의 고유벡터 전체와 영벡터로 이루어진 집합이며, 이는 벡터공간 R^n의 부분공간이다.

예제 7 예제 5에서 주어진 행렬 A의 고유값 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-3$에 대응하는 고유공간을 각각 구하여라.

풀이

예제 5 의 결과에서

① $\lambda=-3$ 일 때 $(\lambda I_3 - A)\mathrm{x}=0$ 를 풀면

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{2}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \mathrm{x}=\begin{bmatrix} -2r \\ r \\ 3r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (r \in R)$$

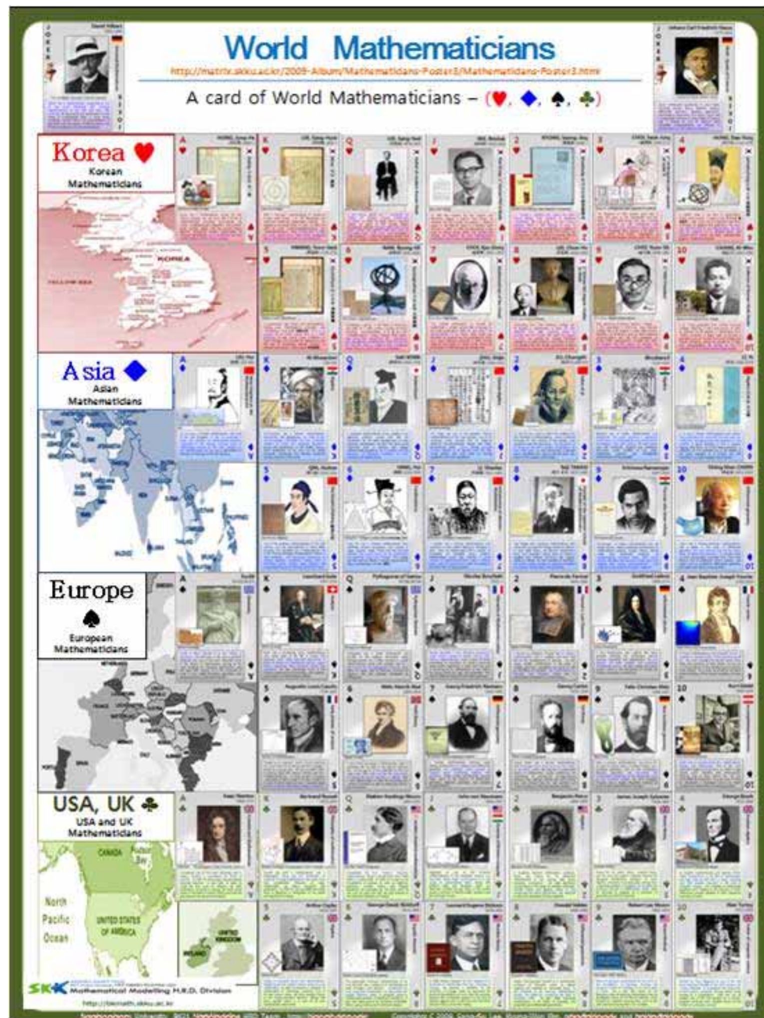
$$\therefore \quad W_1 = < \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} >$$

② $\lambda=3$ 일 때 $(\lambda I_3 - A)\mathrm{x}=0$ 를 풀면

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}=\begin{bmatrix} s+t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s,\ t \in R)$$

$$\therefore \quad W_2 = < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} >$$

■



수학자 카드 포스터

http://matrix.skku.ac.kr/2009-Album/SKKU-Math-Card-F/SKKU-Math-Card-F.html

Chapter 4 연습문제

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm

문제 1 $S=\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}$의 치환 $(2\ 0\ 1\ 3\ 5\ 10\ 8\ 7)$은 짝치환인가 홀치환인가?

문제 2 다음 행렬식을 구하여라.

(1) $\det A = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (2) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

문제 3 A가 n차의 정사각행렬이고 $|A| = -4$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $|A^2|$

(2) $|A^{-1}|$

(3) $|2A|$

(4) $|(2A)^{-1}|$

문제 4 행렬이 아래와 같다고 할 때 다음 물음에 답하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(1) $|A|=|A^T|$임을 보여라.
(2) $|AB| = |A||B|$임을 보여라.

(3) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ 임을 보여라.

문제 5 다음 행렬이 가역행렬이 될 수 있는 x, y 값은?

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ y & x-1 & 0 \\ 1 & 2 & (y-1)(x-4) \end{bmatrix}$$

문제 6 행렬이 아래와 같다고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(1) $|A| = |A^T|$ 임을 보여라.

(2) $|AB| = |A||B|$ 임을 보여라.

(3) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ 임을 보여라.

문제 7 다음 행렬의 여인자를 모두 구하여라.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

문제 8 다음 행렬의 행렬식을 여인자 전개를 이용하여 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

문제 9 (**문제** 8)의 행렬 A의 수반행렬 $\operatorname{adj} A$를 구하여라.

문제 10 여인자 전개를 이용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

문제 11 다음 선형연립방정식을 크래머 법칙을 이용하여 그 해를 구하여라.

(1) $\begin{cases} 3x-3y-2z=3 \\ -x-4y+2z=2 \\ 5x+4y+z=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y-z-w=0 \\ -x-y+z+w=2 \\ x+y-z+w=1 \\ x+y+z+w=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+2x_2+x_3=6 \\ x_1+2x_2+3x_3=9 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + x_2 & = 4 \\ x_2 + \quad x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 \quad + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 = 0 \end{cases}$

문제 12 다음 주어진 문제를 Vandermonde 행렬식을 이용하여 구하여라.

(1) 두 점 $(-1, 11)$, $(2, -10)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(2) 세 점 $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$를 지나는 포물선의 방정식 $y = ax^2 + bx + c$의 계수 a, b, c를 구하여라.

문제 13 행렬식을 이용하여 다음을 구하여라.

(1) 원점에서 점 $(4, 3)$과 $(7, 5)$를 잇는 두 변으로 이루어진 평행사변형의 넓이

(2) 세 개의 벡터 $(1, 0, 4)$, $(0, -2, 2)$, $(3, 1, -1)$에 의하여 만들어지는 평행육면체의 부피

문제 14 다음 행렬들의 고유값과 고유벡터를 구하여라.

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

문제 P1 아래 행렬 A에 대해 왜 $\det A = 0$인지를 설명하여라.

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ a+4 & a+5 & a+6 \\ a+7 & a+8 & a+9 \end{bmatrix}$$

문제 P2 두 정사각행렬 A, B가 가역인 행렬 P에 대하여 $A = P^{-1}BP$를 만족하면 $|A| = |B|$ 임을 보여라.

문제 P3 아래 행렬식에 대한 간단한 공식을 찾아라.

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

문제 P4 $n > 1$인 n차 정사각행렬 A에 대하여 다음을 증명하여라.

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$$

문제 P5 A가 4×4 크기의 행렬이라 하고, 만일

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) $\det(\operatorname{adj} A)$를 계산하여라. 이 값이 $\det(A)$와 어떤 관계가 있는가?

(2) A를 구하여라.

문제 P6 크래머 법칙을 이용하여 다음 점을 지나는 3차 다항식 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 를 결정하여라.

$$(0,\ 1),\ (1,\ -1),\ (2,\ -1),\ (3,\ 7)$$

문제 P7 특성다항식이 $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$일 때 행렬 A^2의 고유값을 구하여라.

문제 P8 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$의 각각의 고유값에 대응하는 고유공간들을 구하고 그들이 좌표평면에서 기하학적으로 서로 직교임을 설명하여라.

문제 P9 아래 행렬의 특성방정식을 구하여라. 그리고 그 방정식의 근을 공학적 도구를 이용하여 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$





[이춘호] 한국인 최초의 수학석사 (1921년, OSU), 연희전문 수물과 한국인 최초의 수학 교수(1회 졸업생인 장세운이 졸업한 다음 해에 부임), 해방 후 미군정하의 서울대 3대 총장 역임
http://www.youtube.com/watch?v=A-z5X0KeeU0

[장세운] 연희전문 수물과 1회 졸업생, 한국인 최초의 수학박사(1938년, Nortwestern 대학)
http://matrix.skku.ac.kr/2008-Album/KJHM-sglee-070824.htm

[장기원] 연희전문 수물과 2회 졸업생, 최초의 한국수학사 전문가
http://matrix.skku.ac.kr/2011-Album/KiWonChang-v1/KiWonChang-v1.html
http://matrix.skku.ac.kr/2014-Album/KiWonChang.pdf

Chapter 5

행렬모델

*5.1 Blackout Game
*5.2 Sage를 활용한 선형모델
*5.3 퀴즈 및 중간고사 예시

주위의 문제를 우리가 배운 지식을 이용하여 해결하는 것은 우선 주어진 현상을 수식화하여야 가능한데, 이 과정을 수학적 모델링이라고 하며, 선형대수학의 지식은 수학적 모델링 과정의 key idea입니다.
행렬은 영화 〈MATRIX〉에서 보았듯이 우리 주위 곳곳에 퍼져 있는데, 예를 들어 컴퓨터, 통신, 암호, 코딩이론, 선형계획법 등의 OR이론, 게임이론, 인구문제, 마코프과정, 구글 검색엔진, 전자 문서를 만드는 아도비 등이 모두 행렬의 이용이며 응용입니다.
우리는 이 장에서 지금까지 배운 내용이 실제 주위의 문제를 해결하는데 어떻게 이용되는지를 보여주는 간단한 선형모델을 둘러보고 그간 배운 내용을 복습하겠습니다.

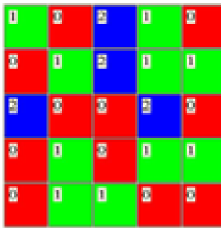
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-7.pdf

선형대수학

5.1 *Blackout Game

- 참고 동영상: http://youtu.be/_bS33lfa29s
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/blackwhite2/blackwhite.html

http://matrix.skku.ac.kr/bljava/Test.html http://math1.skku.ac.kr/Big-LA/Blackout.htm



본 절에서는 여러분이 배운 선형대수학 지식이 주위의 문제해결에 얼마만큼 중요한 열쇠가 되는지를 보여준다. 2001년 영화 〈뷰티풀 마인드(A Beautiful Mind)〉에서 주인공 존 내쉬(John Forbes Nash, Jr., 1928~)가 바둑 두는 모습이 나오며 관련 홈페이지에 '흑백(Blackout, Lights out, Merlin's Magic square)' 게임이 소개되었다. 우리는 이 게임을 선형대수학적으로 해석하여 게임을 이기는 최적의 전략을 소개한다.

바둑판을 이용한 흑백 게임의 최적해를 구하는 선형대수학 알고리즘



먼저 기본적인 흑백 게임의 규칙은 다음과 같다.

3×3 바둑판에 바둑알 9개가 있다. 게임은 바둑알을 선별적으로 클릭하는 과정을 거쳐 바둑알 9개 모두를 아래의 2가지 경우와 같이 같은 색으로 만드는 것이다. 이 과정에서 조건은 한 바둑알을 클릭하면 주변에 변을 같이하는 상, 하, 좌, 우 바둑알들이 함께 뒤집어지게(toggle) 된다.

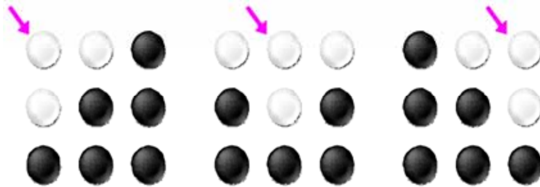
이 문제에서 일부의 바둑알이 뒤집힌 상태로 주어진 초기의 패턴에 따라서 답이 있는 문제와 답이 없는 문제가 존재하는가? 그런 존재성을 수학적으로 증명할 수 있을까? 즉 홈페이지 관리자가 '상대가 이길 수 없는 초기 조건(영원히 이길 수 없는 문제)'을 제시할 수 있을까? 그렇지 않다면 이 문제는 어떠한 초기 조건이 주어져도 반드시 답이 존재하는 그런 부류의 문제일까? 만약 그렇다면 "그런 사실에 대한 증명은 가능한가?" 하는 해의 존재성에 대한 문제를 제기할 수 있다. 또, 그런 해의 개수(극단적인 경우 해의 유일성)에 대한 답을 모두 선형대수학적

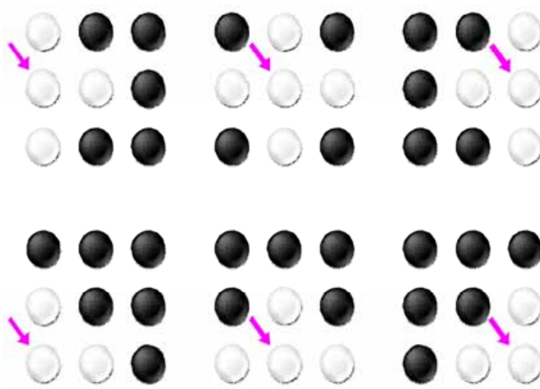
으로 줄 수 있다.



이제 이 게임의 해의 존재성에 대한 선형대수학적 증명을 시도해 보자. 이 게임에서 클릭을 한다는 것을 수학적으로 표현하면 어떻게 될까? 우리는 수없이 바둑알들을 클릭할 수는 있지만 서로 다르게 클릭할 수 있는 방법은 오로지 9가지뿐이다. 다른 것들은 모두 이들의 일차 결합이다. 그리고 9가지 바둑알 중 하나의 바둑알을 클릭하면 주변의 바둑알들이 뒤집어지게(Toggle) 되는데 이것은 수학적으로 어떻게 표현할 수 있을까? 이것은 바로 색을 바꾸어 준다는 의미로 대응하는 '9가지 바둑알들의 집합'을 더하는 것으로 이해할 수 있다. 즉, 바둑판을 3×3 행렬로 표현하고, 9가지 행렬을 2를 법으로 하는 잉여류의 합으로 문제를 해결할 수 있다. 다시 말하면 흰색이 1이고 검은색이 0이라고 가정할 때 위의 9개의 바둑알 클릭이라는 동작은 아래의 9개 '행렬을 더한다'의 문제로 바뀌게 된다. 만약 초기 조건이 주어졌다고 가정하면 초기 조건에 해당하는 행렬에 9개의 바둑알 클릭을 수행함에 따라 9개의 행렬 중에 몇 개를 더하는 것과 같은 문제로 바뀐다는 것이다.

이 과정을 통해 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 혹은 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$이라는 결과를 도출할 수 있느냐는 것인데 9개의 서로 다른 바둑알의 클릭은 다음 9개의 행렬 중 하나를 더한다는 것으로 대치된다. 이때 합은 대응하는 성분끼리의 합을 2를 법으로 하는 잉여류로 한다.





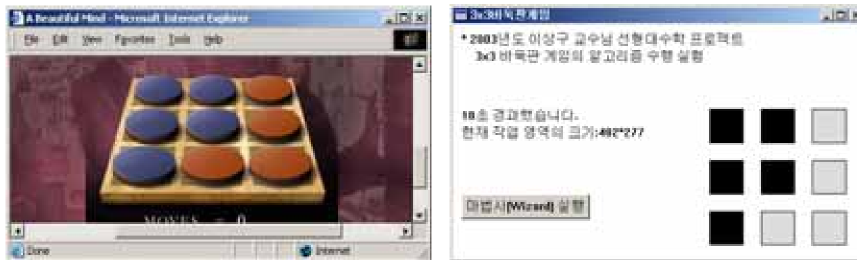
[클릭 한번으로 게임이 끝날 수 있는 9가지 기본패턴과 대응하는 행렬](색을 반전시키면 나머지 9가지 패턴이 추가로 생성됨)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

실제 한 가지 예를 들어 보자. 아래의 경우에는 3×3 바둑판에 검은색(파란) 돌 5개와 흰색(붉은) 돌 4개가 존재하고 있다.



위의 경우 검은색 돌을 0으로 흰색 돌을 1로 가정하면, 초기 조건에 해당하는 행렬은

$$B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

로 표현할 수 있고 여기에 마우스를 여러 번 클릭한다는 의미는 아래의 행렬들을 더하는 것이다.

$$a\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}+e\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}+f\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}+g\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}+h\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

즉, 위의 행렬을 더한 값이 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 혹은 $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$이 될 수 있느냐의 문제가 되는 것이다. 여기서 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$가 되게 한다는 것은 모든 바둑알을 검은색으로 만든다는 것이고 $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$라는 것은 모두 흰색으로 만든다는 것을 의미한다. a라는 계수가 의미하는 것은 $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$이라고 하는 행렬을 a번 더하는 것을 의미하는 것으로서 마우스로 첫 번째 $(1,1)$ 바둑알을 몇 번 클릭하는지를 말하는 것이다. 다른 b, c, d, e, f, g, h, i 역시 마찬가지 방법으로 해석될 수 있다.

문제를 간결하게 생각하기 위해 결과가 모두 검은색이 되게 만드는 것이 목적이라고 가정하자. 이때 최종값은 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$이면 된다. 위 식을 묶어서 다시 쓰면 아래의 방정식을 만족하는 a, b, c, d, e, f, g, h, i를 구하라는 문제가 되는데, 여기서 행렬 밑의 (i,j)는 (i,j) 성분의 위치에 있는 바둑알을 클릭하는 것을 뜻한다.

$$
\begin{aligned}
& a\underset{(1,1)}{\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}+b\underset{(1,2)}{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}}+c\underset{(1,3)}{\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}+d\underset{(2,1)}{\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}}+e\underset{(2,2)}{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}} \\
& +f\underset{(2,3)}{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}+g\underset{(3,1)}{\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}}+h\underset{(3,2)}{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}}+i\underset{(3,3)}{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}}+\underset{\text{초기값}}{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}}=\underset{\text{목표값}}{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}} \\
\Rightarrow\ & a\underset{(1,1)}{\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}+b\underset{(1,2)}{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}}+c\underset{(1,3)}{\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}+d\underset{(2,1)}{\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}}+e\underset{(2,2)}{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}} \\
& +f\underset{(2,3)}{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}+g\underset{(3,1)}{\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}}+h\underset{(3,2)}{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}}+i\underset{(3,3)}{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}}=\underset{\text{목표값}}{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}}-\underset{\text{초기값}}{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}}=-\mathrm{b}
\end{aligned}
$$

위의 연립방정식을 푸는 과정에서 주어진 9개의 3×3 행렬은 각각 9×1 벡터(또는 행렬)로 생각할 수 있으므로 실제로 $\mathrm{x}=[a\, b\, c\, d\, e\, f\, g\, h\, i]^T$에 관하여 풀어보면 9개의 방정식이 생성되고 이렇게 생긴 연립방정식을 다시 행렬로 표현하면 아래와 같은 9×9 대칭행렬 A를 포함하는 연립일차방정식이 된다. 이제 초기 문제에 해당하는 행렬 b와 A를 이용하여 실제 x를 구해보자.

예를 들어 3×3 행렬 $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$은 9×1 벡터 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$로 바꾸어 생각한다.

$$
A\mathrm{x}=-\mathrm{b}\ \Rightarrow\ A\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\\g\\h\\i\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}\text{에서 } A=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&1&0&0\\0&1&0&1&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}
$$

Sage, Wolframalpha, MATHEMATICA, MATLAB 또는 저자가 개발한 자바 행렬계산기 등을 이용하여 실제로 위의 계산을 수행하면

$$
\mathrm{x}=\left[\frac{1}{7}\ -\frac{4}{7}\ \frac{1}{7}\ \frac{3}{7}\ \frac{2}{7}\ -\frac{4}{7}\ -\frac{6}{7}\ \frac{3}{7}\ -\frac{6}{7}\right]^T
$$

가 되고 x의 각 성분을 정수로 만들기 위해 x에 7을 곱해 주면

$$7\mathbf{x} = [1\ -4\ 1\ 3\ 2\ -4\ -6\ 3\ -6]^T$$

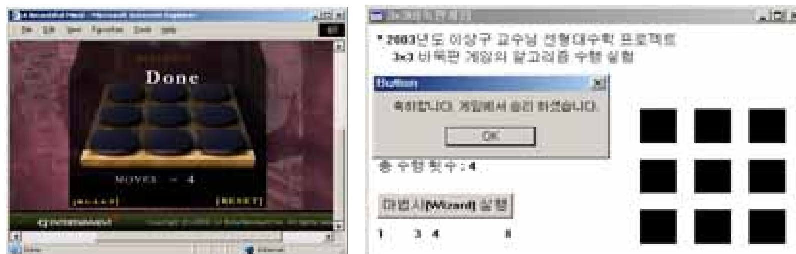
이 되며, 이것의 각 성분들은 2를 법으로 하는 잉여류의 합(즉, 2로 나눈 나머지로 표현)에 의해

$$7\mathbf{x} \equiv [1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,0]^T \pmod 2$$

이 된다. 위의 벡터를 다시 3×3 행렬로 표현하면 아래와 같이 쓸 수 있는데 우리가 알아낸 것은 바로 이 행렬이 게임 승리의 전략에 대한 답을 준다는 것이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

실제 1이라고 쓴 $(1,1)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(3,2)$ 성분의 바둑알을 순서대로 클릭해본다. 이 성분을 9×1 벡터 성분의 위치와 대응시켜 생각하면 1번, 3번, 4번, 8번 위치를 클릭하면 분명히 4번 만에 게임은 끝이 날 것이다. 사실 클릭하는 순서와는 관계가 없이 게임은 끝난다. 단지 이 4개의 위치를 한 번씩 클릭하는 것만 중요한 것이다. 아래의 그림은 실제로 주어진 바둑판에서의 지정된 4개 바둑알을 클릭하자마자 4번 만에 게임이 끝났음을 보여주고 있다. 이 그림에서 '총 수행 횟수 4'는 클릭(MOVE) 4번에 게임이 끝났음을 의미한다. '마법사(Wizard) 실행'이라는 명령을 실행하면 아래 그림에서 볼 수 있듯이 그 아래 숫자 '1 3 4 8'이 나타나는 데 이것은 저자가 개발한 소프트웨어에서 최적의 해를 확인하기 위해 제공한 기능인 마법사를 클릭하여 얻은 최적해, 즉 클릭해야 할 돌의 위치를 뜻한다.

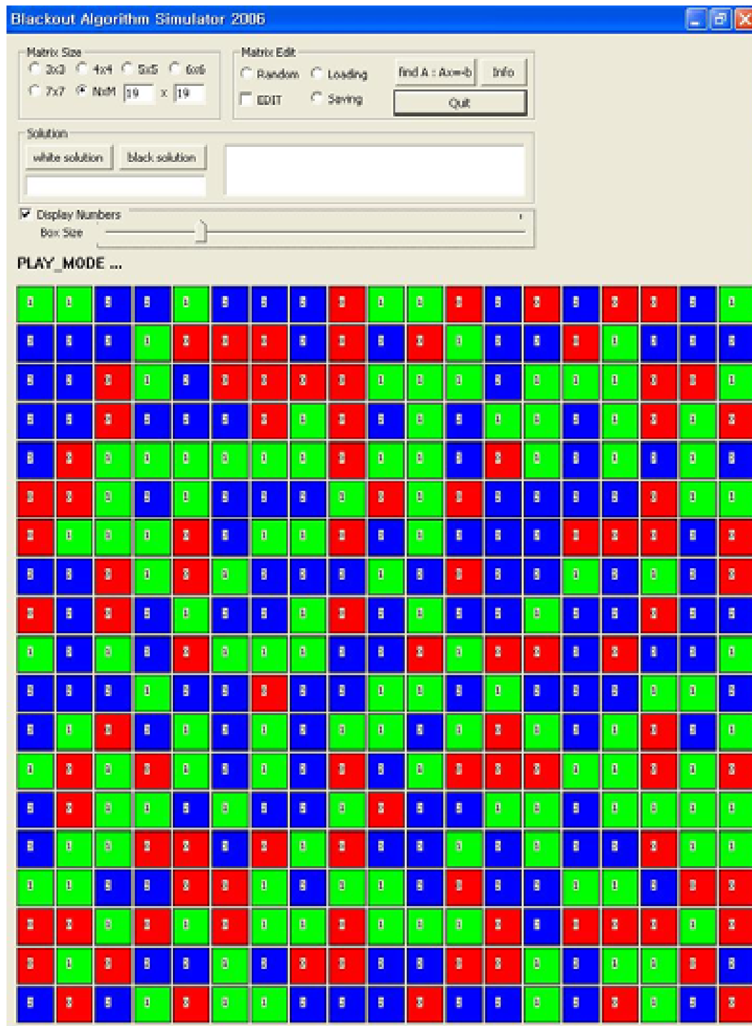


위에서 보았듯이 선형연립방정식의 해를 구하는 능력은 여러분 주위의 다양한 문제에 적용이 가능하다. 위의 알고리즘을 이용해 저자와 연구원이 만든 프로그램으로 실험한 결과가 아래 그림으로 첨부된 것이다. 이 프로그램은 다음 사이트에서 다운받아 사용할 수 있다.

참고 http://matrix.skku.ac.kr/sglee/blackout_win.exe
http://matrix.skku.ac.kr/sglee/blackout_win.zip

위의 내용은 선형대수학을 학습하면서 학생이 제기한 문제를 학생과 함께 풀고 관련 프로그램을 만들어서, 국제학회 및 국내 논문집에 발표한 내용으로 전문과 강의자료는 아래 웹사이트에서 볼 수 있다.

참고 http://matrix.skku.ac.kr/2012-mm/lectures-2012/A3-blackout-paper-ENG.pdf
http://matrix.skku.ac.kr/2009/2009-MathModeling/lectures/week12.pdf

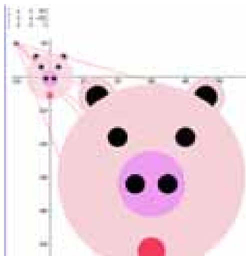


[3색 흑백 게임 시뮬레이터]

5.2 *Sage를 활용한 선형모델

● 참고 동영상: http://youtu.be/CLxjkZuNJXw
● 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/
http://math1.skku.ac.kr/home/pub/1516/ http://matrix.skku.ac.kr/mmd/index.html

(1) Power Method(거듭제곱법)



사회 현상에서 유도되는 많은 행렬모델에 대응하는 행렬의 가장 큰 고유값은 그 모델의 변화에 대한 예측을 가능하게 하는 많은 정보를 준다. 따라서 가장 큰 고유값만 찾아도 원하는 답을 얻기에 충분한 경우가 많다. 그러나 손으로는 물론 소프트웨어를 이용해도 행렬이 조금만 커지면 정확한 고유값들을 모두 구하는 것은 힘들어진다. 따라서 크기가 큰 행렬의 경우에 모든 고유값을 찾기보다는 가장 큰 고유값만을 손쉽게 찾는 새로운 방법을 연구해 낸 것이 바로 행렬의 거듭제곱을 이용하는 "Power Method" (거듭 제곱법)이다. 이 절의 목표는 행렬의 가장 큰 고유값을 수치적으로 구하는 방법을 소개하는 것이다.

행렬의 가장 큰 고유값을 수치적으로 구하는 방법

만약, A가 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$을 서로 다른 고유값으로 갖는 $n \times n$ 행렬이라고 가정하면, 일반성을 잃지 않고 고유값을 다음처럼 크기순으로 배열할 수 있다. 주로 감소하는 방향으로 순서를 정한다.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$$

이때 크기(절대값)가 가장 큰 (실수의) 고유값인 λ_1을 우세한(dominant) 고유값이라고 한다. 또 각각의 고유값에 대응하는 고유벡터를 각각

$$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$$

이라고 표시하자. 그러면 "고유값들이 서로 다르므로 그에 대응하는 고유벡터들의 집합은 일차독립인 집합이다" (8장 정리 8.2.5). 고유값과 고유벡터의 정의에 의하여,

$$A\mathrm{v}_i = \lambda_i \mathrm{v}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

라 하면, 우리의 문제는 주어진 행렬 A에 대해 크기가 가장 큰 고유값 λ_1과 그에 대응하는 고유벡터 v_1을 찾는 것이다. 이 일을 시작하기 전에 먼저 다음과 같은 사실을 기억하자.

(1) 고유벡터의 0이 아닌 스칼라배도 같은 고유값에 대응하는 고유벡터이다.
(2) 고유값과 고유벡터 관계를 확인하는 가장 정확한 방법은 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$가 되는 것을 확인하는 방법이다.
(3) 우리는 e_i를 열벡터 $[0\,0 \cdots 1 \cdots 0\,0]^T$라고 표시하자. 즉 e_i는 i번째 성분만 1이고, 나머지 성분은 모두 0인 열벡터이다. 그러므로 $A\mathrm{e}_i$는 A의 i번째 열이 될 것이다.

R^n의 일차독립인 벡터들의 집합 $\{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^n$은 R^n의 기저를 이루기 때문에 임의의 벡터 x는

$$\mathrm{x} = c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n$$

으로 표현할 수 있다. 양변에 A를 곱하고, 이를 전개하면,

$$A\mathrm{x} = c_1A\mathrm{v}_1 + c_2A\mathrm{v}_2 + \cdots + c_nA\mathrm{v}_n$$

이 되며 또한 $A\mathrm{v}_i = \lambda_i\mathrm{v}_i,\ i = 1, \ldots, n$이므로

$$A\mathrm{x} = c_1\lambda_1\mathrm{v}_1 + c_2\lambda_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathrm{v}_n$$

이 된다. 여기서 양변에 A를 k번 반복하여 곱하면,

$$\begin{aligned} A^k\mathrm{x} &= c_1\lambda_1^k\mathrm{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathrm{v}_n \\ &= \lambda_1^k\left\{c_1\mathrm{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathrm{v}_n\right\} \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 충분히 큰 k값에 대해서 λ_1의 크기가 다른 λ_i들의 크기보다 크기 때문에 $|\lambda_1|^k$은 모든 $|\lambda_i|^k$ $(i = 2, \ldots, n)$보다 매우 커질 것이다. 즉 $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$.

그러므로 우변의 첫 번째 항의 값은 나머지 항의 값을 압도(dominate)할 것이고, 따라서 충분히 큰 k에 대해서

$$A^k\mathrm{x} \approx c_1\lambda_1^k\mathrm{v}_1$$

을 얻을 수 있다.

게다가 고유벡터의 (0이 아닌) 스칼라배도 역시 고유벡터이므로 우리는 고유값 λ_1에 대응하는 고유벡터를 두 벡터 $A^{k+1}\mathrm{x}$와 $A^k\mathrm{x}$의 성분들을 비교하여 찾을 수 있다. 이때 $A^{k+1}\mathrm{x}$의 각 성분은 $A^k\mathrm{x}$의 각 성분의 λ_1배이다.

그러면 x는 무엇일까? 그것은 임의로 선택될 수 있다. 그러나 다른 고유벡터 중에 하나이거나 그들의 1차 결합 중 하나이기는 원하지 않으므로 "Power Method"에서는 보통 $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$를 안전하게 열벡터

$$[\,1\ 1\ \cdots\ 1\ \cdots\ 1\ \ 1\,]^T$$

로 선택한다. 그리고 적당한 k에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{x}_1 &= A\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}_2 &= A^2\mathrm{x}_0 = A\mathrm{x}_1\\ &\vdots\\ \mathrm{x}_{k+1} &= A^{k+1}\mathrm{x}_0 \approx \lambda A^k\mathrm{x}_0 = \lambda\mathrm{x}_k\end{aligned}$$

largest eigenvalue $\begin{cases} v^{k+1} = \dfrac{Av^k}{|Av^k|} \\ \lambda_k = v^k . Av^k \end{cases}$

smallest eigenvalue $\begin{cases} v^{k+1} = \dfrac{A^{-1}v^k}{|A^{-1}v^k|} \\ \lambda_k = \dfrac{1}{v^k . A^{-1}v^k} \end{cases}$

되는 λ를 찾으면, 그것이 바로 우리가 찾는 크기가 가장 큰 "우세한(dominant) 고유값 λ_1"이 된다. 그리고 x_k가 대응하는 고유벡터이다. 아래의 예를 통해 위의 설명을 확인하자.

예제 1 행렬 A가 다음과 같다고 하자.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$\mathrm{x}=[1,\ 1,\ 1]^T$로 하고 Sage를 이용하여 행렬의 충분히 큰 (약 10 또는 20 정도) 거듭제곱을 구하면 다음과 같다.

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080

```
A=matrix(3, 3, [1, 2, 0, 2, 1, 2, 1, 2, 3])        # A 입력
x=vector([1, 1, 1])                                 # 벡터 x 입력
K10 = (A^10) * x          # K10은 A의 10 거듭제곱에 열벡터를 곱한 벡터
K11 = (A^11) * x          # K11는 A의 11 거듭제곱에 열벡터를 곱한 벡터
print(K10)
print
print(K11)
```

```
(3498205, 6681695, 9264127)
(16861595, 32206359, 44653976)
```

```
dom_ev=K11[0]/K10[0]  # 우세한(dominant) 고유값은 K10, K11 각각의 첫 번째 성분을 나
눈 값으로 구할 수 있다.
print (dom_ev.n())      # dom_ev 출력. .n()은 값을 소수 형태로 출력한다.
print
print (n((1/K10[0])*K10))   # 고유벡터 구하기
```

```
4.82007057905412

(1.00000000000000, 1.91003528952706, 2.64825160332228)
```

```
A.eigenvalues()  # A의 고유값
```

```
[-1.279452315768607?, 1.459362941393819?, 4.820089374374788?]
```

■

예제 1 에서

$$A^{10}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3498205\\6681695\\9264127\end{bmatrix},\quad A^{11}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}16861595\\32206359\\44653976\end{bmatrix}.$$

이 값들만으로 보면 두 벡터 사이의 연관성이 적어 보인다. 그러나 각각을 자신의 첫 번째 성분으로 나누면 다음을 얻게 된다.

$$A^{10}\mathbf{x}=3498205\begin{bmatrix}1\\1.910\\2.648\end{bmatrix}$$

$$A^{11}\mathbf{x}=16861595\begin{bmatrix}1\\1.910\\2.648\end{bmatrix}$$

이제 연관성이 쉽게 확인된다. 만약 이 단계에서 이런 연관성(수렴하는 고유벡터)이 없으면 극한에 가까이 갈 정도로 충분히 큰 k값을 이용하면 궁극적으로 위와 같은 연관성을 갖는다.

우리는 고유값과 고유벡터의 정의를 이용하여 다음의 결과를 확인할 수 있다. 즉 우세한(dominant) 고유값은

$$\lambda_1=\frac{16861595}{3498205}=4.820$$

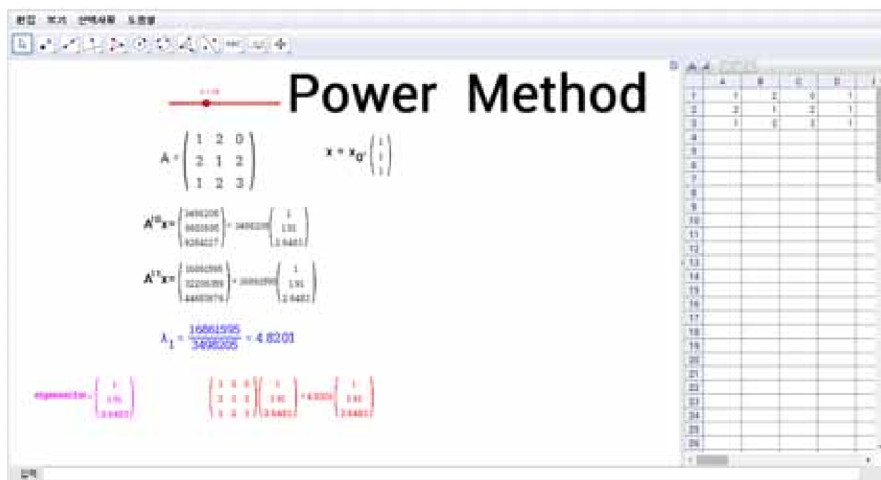
이며 그것에 대응하는 고유벡터는 $[1\ \ 1.910\ \ 2.648]^T$이다. 실제로

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.910 \\ 2.648 \end{bmatrix} = 4.820 \begin{bmatrix} 1 \\ 1.910 \\ 2.648 \end{bmatrix}$$

을 만족한다.

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[Power Method] http://www.geogebratube.org/student/m120827

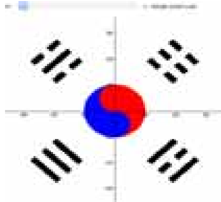


참고 예제 1 에서 보듯이 우리는 가장 큰 고유값과 그에 대응하는 고유벡터를 구하기 위해 행렬 A의 거듭제곱을 이용하였다. 그러면 도대체 얼마나 큰 거듭제곱이 필요할까? 위의 예에서는 임의로 $A^{10}\mathbf{x}$, $A^{11}\mathbf{x}$를 소수 3자리까지 계산할 수 있었다. 그러나 더욱 정확한 고유값를 원한다면 연속적인 더 높은 거듭제곱의 행렬을 이용하면 된다. 아래 웹사이트에서 제공하는 "Perron-Frobenius 정리"는 "음이 아닌 어떤 행렬에 대해서도 실수 값으로 유일하게 존재하는 크기가 가장 큰 고유값은 위의 방법으로 언제나 구할 수 있다"는 것을 이론적으로 보여준다.

참고

http://matrix.skku.ac.kr/sglee/perron_frobenius/perron_frobenius.html

(2) 행렬계산기(Sage Matrix Calculator)



이 절에서는 Sage를 이용하여 개발한 행렬계산기를 소개한다. 이를 활용하면 선형대수학의 대부분의 개념을 언제, 어디서나 사용가능한 무료 도구와 함께 직관적으로 이해하고, 시각화 및 대용량 계산을 수시로 편리하게 수행하며 학습할 수 있다. 더구나 다루는 행렬의 크기를 자연스럽게 변형 및 확대할 수 있다.

Sage Matrix Calculator(행렬계산기)

SKKU Sage Matrix Calculator

행렬계산기 실행(Evaluate)

A ... Choose_D ... B ... Operation ... v ... n or k=

$A = \begin{pmatrix} 5.0 & -3.0 \\ -1.0 & -7.0 \end{pmatrix}$

A is square? True
A is nilpotent? False
A is symmetric? False
A is invertible? True
A is Hermitian? False
A is Skew-Hermitian? False
A is unitary? False

Powered by sage

Sage 행렬계산기는 Sage Cell 서버를 이용하여 만들어졌다. 위의 그림과 같이 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 실수배 등의 기본적인 연산 외에 선형대수학의 중요한 개념인 행렬식, rank, trace, nullity, 고유값, 특성방정식 및 역행렬, 수반행렬, 전치행렬, 전치켤레행렬 등을 구할 수 있도록

제작되었다. 또한 현존하는 대부분의 웹기반 공개형 행렬계산기가 포함하고 있지 않은, 그러나 선형대수학 교육에 꼭 필요한 연산인 LU, SVD, QR-분해 등도 계산할 수 있다. 열의 크기를 1로 선택하면 행렬을 벡터로 인식하여 벡터에 관한 연산을 수행할 수 있는데 벡터의 내적, 외적, 크기(norm)를 계산할 수 있다. 그리고 행렬을 구성하는 열벡터들을 이용하여 Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 수행하여 행렬의 기본 공간의 기저를 계산할 수도 있다. 기존에 많은 행렬계산기가 실수범위 혹은 유리수범위에서 계산이 가능하였다면 본 행렬계산기는 계산 범위를 복소수까지 확장하여 사용할 수 있어, 선형대수학의 거의 모든 문제를 해결할 수 있다.

행렬계산기의 구조

일단 행렬계산기는 아래 그림과 같이 크게 행렬의 크기를 결정하는 부분과 행렬의 계산을 실행하는 부분으로 나눌 수 있다.

먼저 자신이 계산할 행렬의 크기와 벡터의 크기를 설정하고, 자신이 원하는 행렬의 연산을 선택하면 된다. 아래쪽 그림은 연산 부분을 설명한 것으로 'Choose_D' 에서 필요한 연산을 선택한다. A, B, $A-B$, $A+B$, AB^*, B^*A, AA^*, A^*A 등을 선택할 수 있다. 행렬의 원소가 실수일 경우 A^*와 A^T는 일치한다.

행(m)과 열(n)의 크기를 정하고 실행 버튼을 누르세요. (Determine the size of m and n.)

```
##### 행과 열의 크기를 정하세요. #####

m=2     # 행의 크기
n=2     # 열의 크기

########################################
```

행렬계산기 실행(Evaluate)

A	5.0	-3.0
	-1.0	-7.0
Choose_D	A	
B	5.0	-5.0
	3.0	-8.0
Operation	MatrixProperties	
v	-8.0	
	8.0	
n or k=	1	

앞서 'Choose_D' 에서 행해진 연산 결과는 D에 저장되며 'Operation' 항목에서 추가 연산을 선택하면 D에 대하여 거듭제곱, rank, 역행렬, 상수배, 행렬식, 정사영, nullity, 특성 방정식 등 추가 연산이 진행된다.

Sage 행렬계산기의 기능과 이용방법

Sage 행렬계산기를 실행하기 위해서는 "http://matrix.skku.ac.kr/2014-Album/MC.html" 에 접속을 해도 되지만, 해당 주소에서 제공 하는 코드를 복사하여 다른 Sage Cell 서버나 일반 Sage 서버의 워크시트에 붙여 넣는 방법만으로도 쉽게 실행시킬 수 있다. 이렇게 한 번 실행된 후에는 행렬의 크기를 결정하고, 행렬의 원소를 입력한 후 원하는 행렬 연산을 진행하면 된다.

만일 n차 정사각행렬 A, B에 대하여 $A-B$의 rank 혹은 역행렬을 구하는 문제를 생각하여 보자. 기존의 계산기는 우선 $A-B$를 먼저 계산한 후 다시 그 값을 입력하여 rank 혹은 역행렬을 구해야 한다. 본 행렬계산기는 'Choose_D' 를 이용하여 $A-B$를 계산하고 이를 동시에 D로 정의한다. 그리고 'Operation' 항목에서 $A-B$의 rank 혹은 역행렬을 계산할 수 있도록 하였다. 'Choose_D' 와 'Operation' 항목을 적절히 조합하면 계산된 결과를 다시 입력할 필요 없이 다양한 연산이 가능하다.

Sage 행렬계산기는 총 31개의 행렬연산을 제공한다. 그 중 일부를 살펴보면 아래 표와 같다. 이 Sage 행렬계산기의 가장 큰 특징은 행렬계산기에 대한 Sage 코드가 이미 공개되어 있기 때문에, 자신이 원하는 연산을 추가하거나 원하지 않는 연산을 삭제할 수 있다는 것이다. 이를 적절히 활용하면 앞서 설명한 연산의 종류보다 더 많은 연산을 사용하거나 자신이 원하는 연산만을 선택하여 사용할 수 있다.

연산	실제 입력되는 값	설명
D^n	행렬^k	행렬의 k승
$\text{rank}(D)$	행렬.rank()	행렬의 계수(rank)
D^{-1}	행렬.inverse()	행렬의 역행렬(inverse)
kD	k*행렬	행렬의 상수배
$\det(D)$	행렬.determinant()	행렬의 행렬식(determinant)
$\text{adj}(D)$	행렬.adjoint()	행렬의 수반행렬
D^T	행렬.transpose()	행렬의 전치행렬(transpose)

연산	실제 입력되는 값	설명
charpoly(D)	행렬.charpoly()	행렬의 특성다항식
LU	D,L,U=행렬.LU()	행렬의 LU분해
SVD	U,S,V=행렬.SVD()	행렬의 SVD분해
QR	Q,R=행렬.QR()	행렬의 QR분해
LSE	행렬\벡터	선형연립방정식의 해
eigenvalues	행렬.eigenvalues()	행렬의 고유값
eigensystem	행렬.eigenvectors_right()	행렬의 고유벡터

자신만의 Sage 행렬계산기

한글설명과 함께 제공된 Sage 명령어(http://galois09.skku.ac.kr/sage-spt/quickref-linalg-kor.pdf)를 이용하여 자신이 원하는 자신만의 새로운 행렬계산기를 쉽게 만들 수 있다.

우선 자신이 원하는 연산을 만들 부분에 아래 왼쪽 그림과 같이 행렬계산의 명령어를 추가한다(여기서는 nullity의 계산을 예로 들었다). 다음으로 자신이 원하는 행렬 연산의 명령어를 오른쪽 그림과 같이 추가하면 된다.

```
import pylab
Operation = ['<span class="math">D^ {n }',
        'rank(D)',
        '<span class="math">D^ {-1 }',
        '<span class="math">kD',
        'det(D)',
        'adjD',
        '<span class="math">D^ {T }',
        'tr(D)', '[D:v]', 'nullity(D)',
        'charpoly(D)=',
        '<span class="math">Proj_ {a }']
```

```
if Operation == 'rank(D)':
    A1=A.rank()
    show("rank(A)=%s"%A1)

 if Operation == 'nullity(D)':
    A1=A.nullity()

show("nullity(A)=%s"%(latex(A1)))
```

참고 http://matrix.skku.ac.kr/2014-Album/MC.html

5.3 *퀴즈 및 중간고사 예시

- 참고 동영상: http://youtu.be/CLxjkZuNJXw
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/CLA-Exams-Sol.pdf



이 절에서는 선형대수학 퀴즈와 중간고사 예시를 제공한다.

참고 http://matrix.skku.ac.kr/2012-album/2012-LA-Lectures.htm

선형대수학 퀴즈와 시험은 다음과 같은 형식으로 제시할 수 있다(예시).

* Sage 명령어 활용 시 참고자료는 시험지에 제공한다.

<Sage Linear Algebra 입문 명령어 일부> var('a,b,c,d') # 변수정의 eq1=3*a+3*b==12 # equation1 정의 eq2=5*a+2*b==13 # equation2 정의 solve([eq1, eq2], a,b) # Solve 연립방정식 **A=matrix(CDF, 3, 3, [3, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 4]); # 행렬정의** A.echelon_form() # RREF **A.inverse() # 역행렬** A.det() # 행렬식 A.adjoint() # adjoint matrix **A.eigenvalues() # 고유값** **A.eigenvectors_right() # 고유벡터** **A.charpoly() # 특성방정식**	P,L,U=A.LU() # LU분해 (P: Permutation행렬 / L,U:삼각행렬) vector([3, 1, 2]) # 벡터정의 var('x, y') # 변수정의 plot3d(y^2+1-x^3-x, (x, -pi, pi), (y, -pi, pi)) # 3차원 Plot implicit_plot3d(n.inner_product(p_0-p)==0, (x, -10, 10 , (y, -10, 10), (z, -10, 10)) # 3차원 Hyperplane Plot var('t') # 변수정의 (매개변수방정식) x=2+2*t y=-3*t-2 parametric_plot((x,y), (t, -10, 10), rgbcolor='red') # 직선 Plot

I. (3pt x 6= 18pt) True(T) or False(F). Let $A \in M_{n\times n}$ and $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in R^n$.

1. (F) 모든 정사각행렬은 기본행렬의 곱으로 표현 가능하다.
2. (T) 성분이 모두 정수인 n차 행렬 A의 행렬식의 값이 1이면, A^{-1}의 성분들은 모두 정수이다.
3. (T) $A, B \in M_n$일 때, $\det(AB) = \det(BA)$
4. (T) $\mathrm{proj}_{\mathrm{u}}\mathrm{v} = \dfrac{\mathrm{v}\cdot\mathrm{u}}{\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}}\mathrm{u}$ 〈Quiz 1〉
5. (F) 미지수의 수가 n이고 방정식의 수가 n인 선형연립방정식은 크래머 법칙을 이용하여 해를 계산할 수 있다.
6. (F) 실수성분으로 구성된 2×2 크기의 행렬 A는 $\lambda^2 + \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$을 만족한다.

II. (3pt x 4 = 12pt) State or Define

1. 아래 중 본인에 맞는 난이도의 개념 4개를 골라 본인이 이해한 대로 아래 빈 공간에 간결 명확하게 서술하여라.

평면 π 의 법선벡터(normal vector), 일차독립(linearly independent)과 일차종속, 부분공간의 조건, 크래머의 공식(Cramer's Rule), 고유값(eigenvalue), 고유벡터(eigenvector), 선형변환(LT), 직교행렬(orthogonal matrix), 선형변환 $T : R^n \to R^m$ 의 치역(range), 전사(surjective 또는 onto), 단사(injective, 1-1), 동형사상(isomorphism)

일반적으로 R^n 의 부분집합 $W \neq \phi$가 다음과 같은 두 가지 성질을 만족하면 W를 R^n 의 부분공간(subspace)이라 한다.

$$\begin{cases} \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in W & \text{(덧셈에 닫혀 있다)} \quad (1) \\ k\mathrm{w} \in W & \text{(스칼라곱에 닫혀 있다)} \quad (2) \end{cases}$$

(여기에서, $\mathrm{w}_1,\ \mathrm{w}_2,\ \mathrm{w} \in W,\ k \in R$).

$S = \{\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \ldots,\ \mathrm{x}_k\} \subseteq R^n$에 대하여

$$c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k = 0 \quad (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k \in R)$$
$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

이면, 벡터 $\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \ldots,\ \mathrm{x}_k$(또는 집합 S)는 일차독립(linearly independent)이라고 하고, 또한 벡터 $\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \ldots,\ \mathrm{x}_k$(또는 집합 S)가 일차독립이 아니면 일차종속(linearly dependent)이라고 한다.

[크래머 공식] 선형연립방정식
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$
의 계수행렬을 A라 하고

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$
이라 하면, 이 연립방정식은 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ 로

나타낼 수 있다. 이때, $|A| \neq 0$이면 이 연립방정식은 유일한 해 $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|},\ \cdots,\ x_n = \dfrac{|A_n|}{|A|}$을 갖는다. 여기서 $A_j\ (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$는 A의 j 열을 b로 바꾼 행렬이다.

A를 n차의 정사각행렬이라 하자. 0 아닌 벡터 $\mathrm{x} \in R^n$가 적당한 스칼라 λ에 대하여 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$을 만족하면 λ를 A의 **고유값(eigenvalue)**이라 하고, x를 λ에 대응하는 A의 **고유벡터(eigenvector)**라고 한다.

선형변환 $T : R^n \to R^m$의 치역(range) : $\mathrm{Im}\, T = \{T(\mathrm{v}) \in R^m \ : \mathrm{v} \in R^n\} \subset R^m$.

$T : R^n \to R^m$이 선형변환이면 T의 표준행렬 $A = [T]$ 와 $\mathrm{x} \in R^n$에 대하여 $T(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$, $\forall\ \mathbf{x} \in R^n$ 여기서 $A = [T(\mathrm{e}_1) : T(\mathrm{e}_2) : \cdots : T(\mathrm{e}_n)]$ 이 성립한다. ■

III. (3pt x 10 = 30pt) Find or Explain:

1. (Quiz 1) Explain why the map $T: R^3 \to R^2$ by $T(x,y,z) = (3x+4y, 2x-5y)$ is a Linear Transformation.

Why) For all u$=(u_1, u_2, u_3)$, v$=(v_1, v_2, v_3) \in R^3$ and $k \in R$,

$$T(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = T(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$$
$$= (3(u_1+v_1)+4(u_2+v_2),\ 2(u_1+v_1)-5(u_2+v_2))$$
$$= ((3u_1+4u_2)+(3v_1+4v_2),\ \ (2u_1-5u_2)+(2v_1-5v_2))$$
$$= (3u_1+4u_2,\ 2u_1-5u_2)+(3v_1+4v_2,\ 2v_1-5v_2)$$
$$= T(\mathrm{u})+T(\mathrm{v}).$$

And $T(k\mathrm{u}) = T(ku_1, ku_2, ku_3) = (3ku_1+4ku_2,\ \ 2ku_1-5ku_2)$
$$= k(3u_1+4u_2,\ \ 2u_1-5u_2) = kT(\mathrm{u}).$$

Therefore T is a L.T. ■

2. Find: 점 $P(10, -15, 4)$를 지나고 벡터 a$=(4, 8, 7)$ 에 평행한 **직선의 벡터방정식**을 구하여라.

Ans x $=$ p $+ t$a (단, $t \in R$)
$$= (10, -15, 4) + t(4, 8, 7)$$ ■

3. Find: 점 $P(10, -15, 4)$를 지나고 벡터 a$=(4, 8, 7)$ 와 b$=(4, 5, -6)$가 만드는 **평면의 벡터방정식**을 구하여라.

Ans x $=$ p $+ t_1$a $+ t_2$b (단, $t_1, t_2 \in R$)
$$= (10, -15, 4) + t_1(4, 8, 7) + t_2(4, 5, -6)$$ ■

4. Find: 다음 행렬이 가역행렬이 될 수 있는 x, y값은?

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ y & x-1 & 0 \\ 1 & 2 & (y-1)(x-4) \end{bmatrix}$$

Sol $\begin{cases} x^2 = 0 \\ x-1 = 0 \\ (y-1)(x-4) = 0 \end{cases} \Rightarrow x=0, x=1, x=4, y=1$

$\therefore x \neq 0,1,4\ ,\ y \neq 1$인 모든 실수 ■

5. 학생이 연구소에 취직하여 (29차, 여기서는) 4차 행렬 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$의 **고유값, 고유벡터, 특성방정식을 구하라**는 요청을 팀장에게 받았다면 어떻게 구할지 Step별로 빈칸에 상세하게 서술하여라.

Sol

1) Step 1: (예) 인터넷에 접속하여 http://math1.skku.ac.kr 로 이동한다.
2) Step 2: ID= skku, PW = *** 를 입력하여 접속한다.
3) Step 3: "새 워크시트" 버튼을 누른다.
4) Step 4: 첫 번째 셀에 CDF 형식으로 행렬 A를 다음과 같이 정의한다.
A=matrix(CDF,4,4,[4,1,0,2,0,−1,2,0,0,0,1,0,0,4,0,3])
5) Step 5: 두 번째 셀에 eigenvalues를 구하는 명령어
A.eigenvalues()를 입력하고, 실행한다.
6) Step 6: 세 번째 셀에 eigenvectors를 구하는 명령어
A.eigenvectors_right() 입력하고, 실행한다.
7) Step 7: 네 번째 셀에 characteristic polynomial을 구하는 명령어
A.charpoly() 입력하고, 실행한다.

[4.0, 3.0, -1.0, 1.0]

[(4.0, [(**1.0, 0, 0, 0**)], 1), (3.0, [(**0.894427191, 0, 0, -0.4472135955**)], 1), (-1.0, [(**0.140028008403, 0.700140042014, 0, -0.700140042014**)], 1),
(1.0, [(**-0.377964473009, -0.377964473009, -0.377964473009, 0.755928946018**)], 1)]

x^4 - 7.0*x^3 + 11.0*x^2 + 7.0*x – 12.0 **http://math1.skku.ac.kr/home/pub/495/** ■

6. A가 n차의 정사각행렬이고 $|A| = 9$일 때, $|(2A)^{-1}|$를 구하여라.

Sol $|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = \dfrac{1}{2^n|A|} = \left(\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ■

7. 다음 행렬의 행렬식과 역행렬을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ans $|A| = 3$

and $A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=6,\ A_{12}=(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2,\ A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3,$

$A_{21}=(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0,$

$A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1,\ A_{23}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0,\ A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-3,\ A_{32}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1,$

$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=3$

$$=> A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}\,A=\frac{1}{|A|}[A_{ij}]^T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ ■

8. 위의 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$의 역행렬을 Sage를 이용하여 구하는 과정을 Step별로 빈칸에 상세하게 서술하여라.

Sol

1) Step 1: (예) 인터넷에 접속하여 http://math1.skku.ac.kr 로 이동한다.
2) Step 2: ID= skku, PW = math를 입력하여 접속한다.
3) Step 3: "새 워크시트" 버튼을 누른다.
4) Step 4: 첫 번째 셀에 CC형식으로 행렬 A를 다음과 같이 정의한다.
A=matrix(CC, 3, 3, [1,0,1,−0,3,0,1,0,2])
5) Step 5: 두 번째 셀에 inverse를 구하는 명령어 A.inverse()를 입력한다.

```
[ 2.00   0    -1.0]
[ 0     0.33    0]
[-1.00   0    1.00]
```
http://math1.skku.ac.kr/home/pub/495/ ■

9. 특성다항식이 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$p(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2(\lambda-4)^3$

(1) 행렬의 크기는 얼마인가?

(2) 주어진 행렬은 가역인가? 이유를 설명하여라.

Ans

1) 6×6 행렬 (∵ 1+2+3=6) ■

2) $p(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2(\lambda-4)^3$

$\Rightarrow A$의 고유값은 $\{1, 3, 3, 4, 4, 4\}$ $\Rightarrow \det(A)=(1)(3)^2(4)^3\neq 0(\because \det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)$

$\therefore A$는 가역이다. ■

10. 표준기저를 이용하여 다음 선형변환의 표준행렬 $[T]$를 구하여라.

$T(x, y, z)=(8x+11y-231z,\ 511x+8y+1z,\ -18x+731y-z)$

Ans $T(x, y, z)=(8x+11y-231z,\ 511x+8y+1z,\ -18x+731y-z)$

$T(e_1) = (8, 511, -18)$, $T(e_2) = (11, 8, 731)$,

$T(e_3) = (-231, 1, -1)$

$$\therefore\ [T] = \begin{bmatrix} 8 & 11 & -231 \\ 511 & 8 & 1 \\ -18 & 731 & -1 \end{bmatrix}$$ ■

IV. (5pt x 5 = 25pt) Find or Explain:

1. 선형연산자 $T : R^2 \rightarrow R^2$가 임의의 벡터 $\mathrm{x} = (x, y) \in R^2$에 대하여 원점을 지나는 기울기가 θ인 직선에 대칭시키는 변환인 경우 변환행렬 $H_\theta = [\,T(e_1) \,:\, T(e_2)\,]$를 아래 그림을 보고 구하여라.

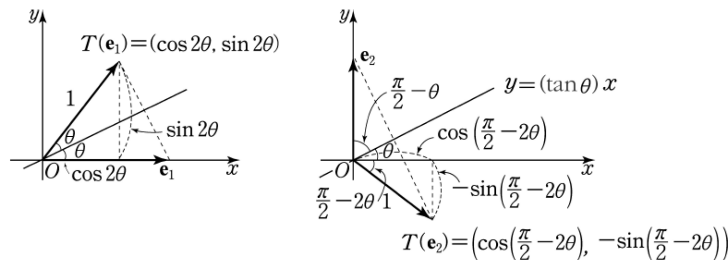


그림 기울기가 θ인 직선에 대한 대칭이동에 따른 표준기저들의 상

(Sol) $H_\theta = [T(e_1) : T(e_2)] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \\ \sin 2\theta & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$이다. ■

2. 선형변환(선형연산자) $T : R^2 \rightarrow R^2$를 아래 왼쪽 그림과 같이 R^2상의 임의의 벡터 x를 x축과 이루는 각이 θ인 원점을 지나는 직선에 정사영시키는 정사영변환으로 정의하자. 그리고 주어진 변환 T에 대응하는 표준행렬을 P_θ라 하면, 아래 오른쪽 그림에서 보듯이 아래 관계 $P_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x})$<크기와 방향은 같고 길이는 절반>를 갖는다. 따라서 위에서 구한 대칭이동의 행렬표현 $H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$를 이용하여 구하여라.

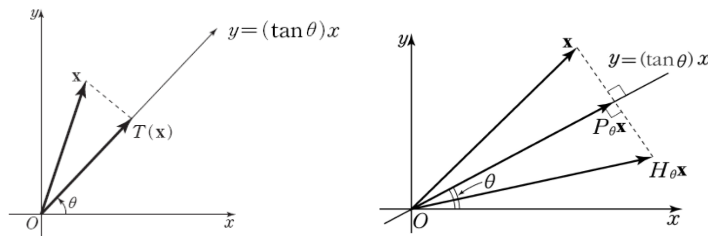


그림 기울기가 θ인 직선에 대한 정사영변환 기울기가 θ인 직선에 대한 대칭이동과 정사영변환과의 관계

(Sol) $P_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x})$ => $P_\theta \mathrm{x} = \frac{1}{2} H_\theta \mathrm{x} + \frac{1}{2}\mathrm{x} = \frac{1}{2} H_\theta \mathrm{x} + \frac{1}{2} I\mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta + I)\mathrm{x}$

$$=> \quad P_\theta = \frac{1}{2}(H_\theta + I) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$ ■

3. 가역 행렬 A, B에 대하여 $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}\,B \cdot \mathrm{adj}\,A$인 이유를 설명하여라.

Ans $\mathrm{adj}(AB) = (|AB|(AB)^{-1})$ $\quad (\because\ C^{-1} = \frac{1}{|C|}\mathrm{adj}\,C \Rightarrow (\mathrm{adj}\,C) = (|C|C^{-1}))$

$= (|A||B|(B^{-1}A^{-1}))$

$= |B|B^{-1}|A|A^{-1} = \mathrm{adj}\,B \cdot \mathrm{adj}\,A$ ■

4. n차 정사각행렬 A의 고유공간이 R^n의 부분공간인 이유를 설명하여라.

Ans 정사각행렬 A의 임의의 한 고유값 λ_i에 대응하는 고유공간을 $E(\lambda_i)$라 하자.

$E(\lambda_i) = \{\mathrm{x} \in R^n | A\mathrm{x} = \lambda_i \mathrm{x}\} \subseteq R^n,\ k \in R,\ E(\lambda_i) \neq \varnothing$

$\forall\, \mathrm{x},\ \mathrm{y} \in E(\lambda_i)$,

우선 $\mathrm{x}+\mathrm{y} \in \mathrm{R}^n,\ k\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n$

1) [Show 덧셈에 대해 닫혀 있다. Show $\mathrm{x}+\mathrm{y} \in E(\lambda_i)$] **(2 pt)**

(Pf) $A\mathrm{x} = \lambda_i \mathrm{x},\ A\mathrm{y} = \lambda_i \mathrm{y}$

$A(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = A\mathrm{x} + A\mathrm{y} = \lambda_i \mathrm{x} + \lambda_i \mathrm{y} = \lambda_i(\mathrm{x}+\mathrm{y})$

$\therefore \mathrm{x}+\mathrm{y} \in E(\lambda_i)$

2) [Show 스칼라곱에 대해 닫혀 있다. Show $k\mathrm{x} \in E(\lambda_i)$] **(2 pt)**

(Pf) $A(k\mathrm{x}) = kA\mathrm{x} = k\lambda_i \mathrm{x} = \lambda_i(k\mathrm{x})$

$\therefore k\mathrm{x} \in E(\lambda_i)$

$\therefore E(\lambda_i)$는 위 두 성질을 만족하므로 벡터공간 R^n의 부분공간이다. **(1 pt)** ■

5. 선형변환 $T : R^n \to R^m$에 대하여, $\mathrm{Im}\,T$는 R^m의 부분공간인 이유를 설명하여라.

(Pf) $\forall\, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T,\ \exists\, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in R^n \ni T(\mathrm{v}_1) = \mathrm{w}_1,\ T(\mathrm{v}_2) = \mathrm{w}_2$

1) [Show 덧셈에 대해 닫혀 있다. Show $\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T$]

$\Rightarrow \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = T(\mathrm{v}_1) + T(\mathrm{v}_2) = T(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2)$ (1 pt)

$\Rightarrow \exists\, \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in R^n \ni T(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in R^m$ (1 pt)

$\therefore \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T$

2) [Show 스칼라곱에 대해 닫혀 있다. Show $k\mathrm{w}_1 \in \mathrm{Im}\,T$]

$\forall\, k \in R,\ k\mathrm{w}_1 = kT(\mathrm{v}_1) = T(k\mathrm{v}_1)$ (1 pt)

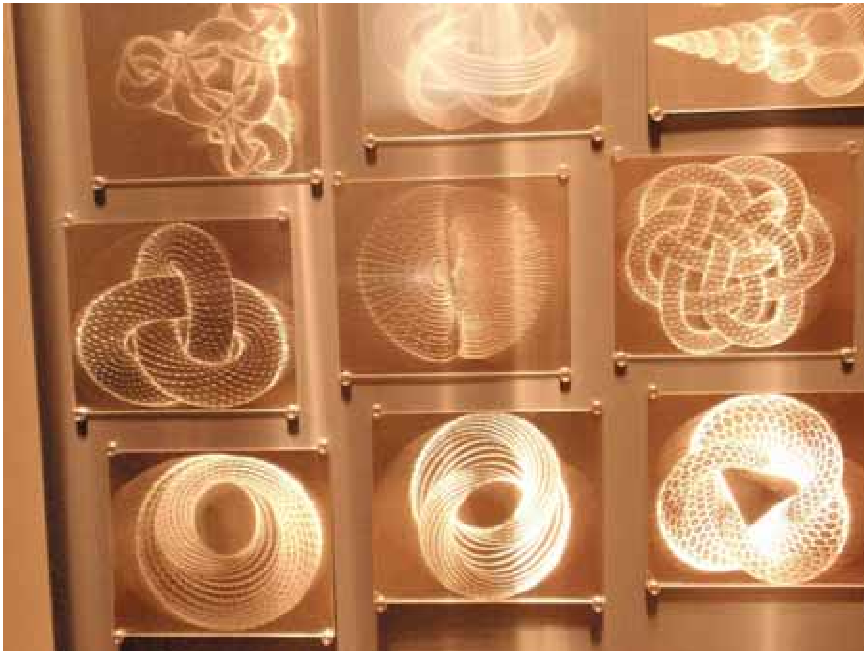
$\Rightarrow \exists\, k\mathrm{v}_1 \in \mathrm{R}^n \ni T(k\mathrm{v}_1) = k\mathrm{w}_1 \in \mathrm{R}^m$ (1 pt)

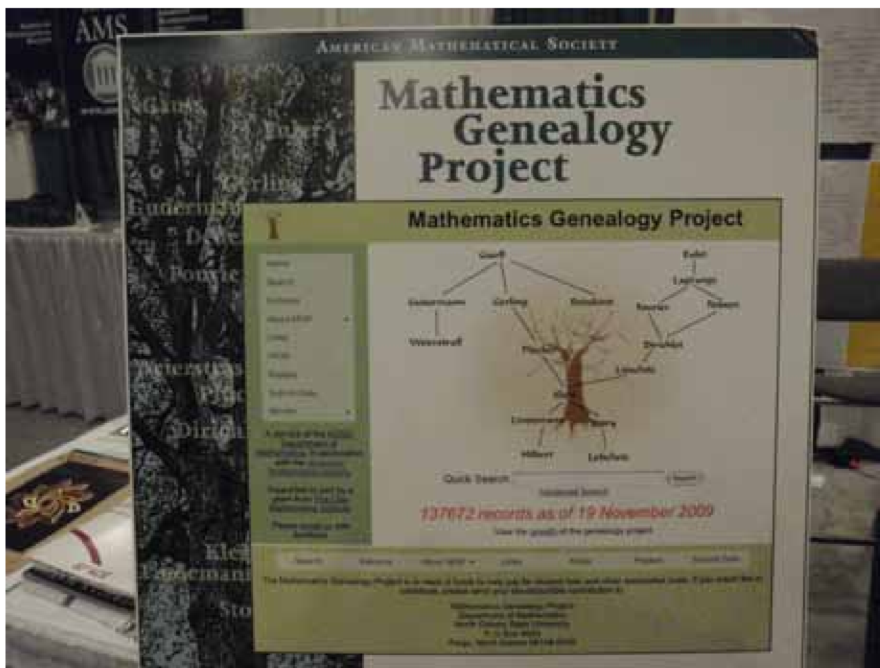
$\therefore \; k\mathrm{w}_1 \in \mathrm{Im}\, T$

$\therefore$ $\mathrm{Im}(T)$는 R^m 의 부분공간이다. (1 pt) ■



[수학박물관] http://momath.org/





[수학자 족보] http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu
http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=45061

Chapter 6

선형변환

6.1 함수(변환)로서의 행렬
6.2 선형변환의 기하학적 의미
6.3 핵과 치역
6.4 선형변환의 합성과 가역성
6.5 Sage를 활용한 컴퓨터 그래픽
연습문제

지금까지 우리는 행렬을 선형연립방정식과 관련된 계수행렬을 중심으로 생각하였습니다. 여기서는 함수로서의 행렬을 생각하겠습니다.

우리는 벡터들의 집합이 두 개의 연산에 의하여 부분공간이라는 대수적 구조체로서 다시 태어나는 것을 보았습니다. 행렬은 이런 부분공간 사이에 연산을 보존한다는 의미를 갖는 함수인 선형변환으로 다시 태어납니다.

그리고 선형변환은 전자 신호의 전송에서 잡음의 필터링이나, 공학적 공정을 분석하는 데 쓰입니다.

우리는 –공간 에서 –공간 으로의 선형변환은 언제나 행렬 로 나타낼 수 있음을 보이고, 에서 로의 선형변환에 대한 기하학적 의미와 합성함수를 이용한 컴퓨터 그래픽에서의 이용을 살펴보겠습니다.

선형대수학

6.1 함수(변환)로서의 행렬

- 참고 동영상: http://youtu.be/Yr23NRSpSoM
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-8-Sec-6-1.html



행렬은 선형성이라는 성질을 갖는 특수한 함수이기도 하다. 이런 함수는 수학, 물리학, 공학적 제어이론, 이미지처리, 음향신호, 컴퓨터그래픽 등 과학 및 일상생활의 여러 분야에서 매우 중요한 역할을 한다.

변환이란?

정의

입력과 출력이 모두 벡터인 함수를 변환(Transformation)이라 한다. 그리고 R^n에서 R^m으로의 변환 $T : R^n \to R^m$에서 $\mathrm{w} = T(\mathrm{x})$를 벡터 x의 T에 대한 이미지(image), x를 벡터 w의 원상(pre-image)이라 한다.

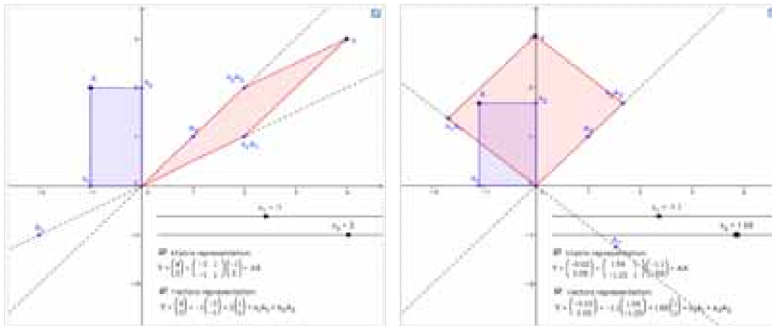


변환의 특수한 경우로, A가 $m \times n$ 행렬이고, $T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$, $\mathrm{x} \in R^n$인 $T_A : R^n \to R^m$를 행렬변환(matrix transformation)이라 한다.

$$\mathrm{x}' = f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ w_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} & a_{wx} & a_x \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} & a_{wy} & a_y \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} & a_{wz} & a_z \\ a_{xw} & a_{yw} & a_{zw} & a_{ww} & a_w \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[행렬변환(Matrix transformation)]
http://www.geogebratube.org/student/b73259#material/22419



정의

R^n에서 R^m으로의 변환 $T: R^n \rightarrow R^m$가 임의의 벡터 $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in R^n$와 임의의 스칼라 k에 대하여 다음 두 조건을 만족하면 T를 R^n에서 R^m로의 **선형변환**(linear transformation)이라고 한다.

(1) $T(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v})$ (2) $T(k\mathrm{u}) = kT(\mathrm{u})$ $(k \in R)$

특히, R^n에서 R^n 자신으로의 선형변환 $T: R^n \rightarrow R^n$를 R^n 위의 **선형연산자**(linear operator)라고 한다.

예제 1 R^2의 벡터 $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$에 대하여 $T: R^2 \rightarrow R^3$를 다음과 같이 정의하면 T는 선형변환임을 보여라.

$$T(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x-y \end{bmatrix}$$

풀이

R^2의 임의의 두 벡터 $\mathrm{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$와 임의의 스칼라 $k \in R$에 대하여

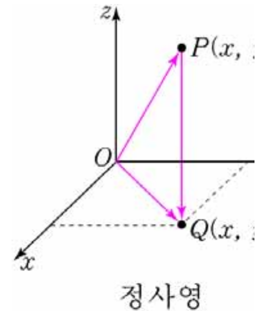
(1) $$T(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ (u_1+v_1)-(u_2+v_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1-u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1-v_2 \end{bmatrix}$$
$$= T(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v})$$

(2) $$T(k\mathrm{u}) = T\left(k\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_1-ku_2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1-u_2 \end{bmatrix} = kT(\mathrm{u})$$

이므로 T는 R^2에서 R^3로의 선형변환이다. ■

예제 2 $T : R^3 \rightarrow R^2$를 $T(x,y,z) = (x,y)$로 정의하면 T는 선형변환임을 보여라.

풀이



정사영

R^3의 임의의 세 벡터 $\mathrm{v}_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{v}_2 = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathrm{v} = (x, y, z)$와 임의의 스칼라를 $k \in R$에 대하여

(1) $$T(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = T(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$$
$$= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$
$$= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = T(\mathrm{v}_1) + T(\mathrm{v}_2)$$
□

(2) $$T(k\mathrm{v}) = T(kx,\ ky,\ kz)$$
$$= (kx,\ ky) = k(x,\ y) = kT(\mathrm{v})$$

이므로 T은 선형변환이다. ■

● 이러한 선형변환을 xy-평면상으로의 **정사영(orthogonal projection)**이라 한다.

예제 3 $T : R^2 \rightarrow R^2$ 을 다음과 같이 정의하면 T는 선형변환이 아님을 보여라.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y+1 \end{bmatrix}$$

풀이

R^2의 임의의 두 벡터 $\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$에 대하여

$$T(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

그런데,
$$T(\mathrm{v}_1) + T(\mathrm{v}_2) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 + 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 + 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 + 2 \end{bmatrix}$$

이므로 $T(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) \neq T(\mathrm{v}_1) + T(\mathrm{v}_2)$이다.

따라서 T는 선형변환이 아니다. ■

참고 특수한 선형변환

- 영변환(zero transformation): 임의의 $\mathrm{v} \in R^n$에 대하여 $T : R^n \to R^m$을 $T(\mathrm{v}) = 0$으로 정의하면 T는 선형변환이 된다. 이를 **영변환**이라 한다.

- 항등변환(identity transformation): 임의의 $\mathrm{v} \in R^n$에 대하여 $T : R^n \to R^m$을 $T(\mathrm{v}) = \mathrm{v}$로 정의하면 T는 선형변환이 된다. 이를 **항등변환**이라 한다.

- 행렬변환(matrix transformation): A가 $m \times n$ 행렬일 때, R^n의 임의의 벡터 x에 대하여 $T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$라 정의하면 T_A는 R^n에서 R^m으로의 선형변환이 된다. 이를 **행렬변환**이라 한다.

예제 4 $T : R^3 \to R^2$를 다음과 같이 정의하면 T는 선형변환임을 보여라.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

풀이

R^3의 임의의 두 벡터 $\mathrm{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$와 임의의 스칼라 $k \in R$에 대하여

(1) $T(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right)$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = T(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v})$

(2) $T(k\mathrm{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = kT(\mathrm{u})$

이므로 T는 선형변환이다. ■

예제 5

예제 1에서 주어진 선형변환 T는 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 이므로

T는 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$에 대한 행렬변환이다. ■

정리 6.1.1 [선형변환의 성질]

만일 $T : R^n \rightarrow R^m$가 선형변환이라면, 다음을 모두 만족한다.

(1) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
(2) $T(-\mathrm{v}) = -T(\mathrm{v})$
(3) $T(\mathrm{u}-\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) - T(\mathrm{v})$

증명 (1) $\forall \mathrm{v} \in V$, $0\mathrm{v} = \mathbf{0}$ 이므로 $T(\mathbf{0}) = T(0\mathrm{v}) = 0\,T(\mathrm{v}) = \mathbf{0}$이다.
(2) $T(-\mathrm{v}) = T((-1)\mathrm{v}) = (-1)\,T(\mathrm{v}) = -T(\mathrm{v})$
(3) $T(\mathrm{u}-\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}+(-1)\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) + (-1)\,T(\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) - T(\mathrm{v})$ ■

R^n에서 R^m으로의 모든 선형변환은 행렬변환으로 나타낼 수 있다.

- $T : R^n \rightarrow R^m$을 임의의 선형변환이라 할 때, R^n의 기본단위벡터 e_1, e_2, … , e_n에 대하여 모든 $\mathrm{x} \in R^n$는

$$\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=x_1\mathrm{e}_1+x_2\mathrm{e}_2+\cdots+x_n\mathrm{e}_n$$

와 같이 나타낼 수 있고, $T(\mathrm{e}_1)$, $T(\mathrm{e}_2)$, ... , $T(\mathrm{e}_n)$은 각각 $m\times 1$ 행렬이므로

$$T(\mathrm{e}_1)=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ T(\mathrm{e}_2)=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ \ldots,\ T(\mathrm{e}_n)=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

이라 할 수 있다. 따라서 모든 선형변환 $T: R^n \to R^m$은

$$\begin{aligned} T(\mathrm{x}) &= x_1 T(\mathrm{e}_1)+x_2 T(\mathrm{e}_2)+\cdots+x_n T(\mathrm{e}_n) \\ &= x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

의 형태로 표시할 수 있다. 여기서 $T(\mathrm{e}_1)$, $T(\mathrm{e}_2)$, ... , $T(\mathrm{e}_n)$을 열벡터로 갖는 $m\times n$ 행렬을 A라 하면

$$A=[\,T(\mathrm{e}_1):\mathrm{T}(\mathrm{e}_2):\cdots:\mathrm{T}(\mathrm{e}_n)\,]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

이므로

$$T(\mathrm{x})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=A\mathrm{x}$$

이다. 위의 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$를 선형변환 T의 **표준행렬**(standard matrix)이라 하며 $[T]$라 표시한다. 따라서 (1)로 주어진 선형변환의 표준행렬은 기본단위벡터를 순서대로 대입하여 열을 구하여 쉽게 만든다.

정리 6.1.2 [표준행렬]

$T: R^n \to R^m$이 선형변환이면 T의 표준행렬 $A=[T]$와 $\mathrm{x}\in R^n$에 대하여 다음이 성립한다.

$$T(\mathrm{x})=A\mathrm{x},\quad \forall\, \mathrm{x}\in R^n$$

여기서 $A=[\,T(\mathrm{e}_1):T(\mathrm{e}_2):\cdots:T(\mathrm{e}_n)\,]$ 이다.

예제 6

선형변환 $T : R^3 \rightarrow R^4$이 $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$일 때, T의 표준행렬을 이용하여 $T(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$으로 표시하여라.

풀이 행렬을 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$라 놓으면, $T(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$인 행렬변환이 된다.

$$T(\mathrm{x}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\mathrm{x}$$ □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/6-MA-standard-matrix.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu

```
x, y, z = var('x y z')
h(x, y, z) = [x+2*y, -x-y, z, x+z]
T = linear_transformation(QQ^3, QQ^4, h)  # 선형변환 정의, 여기서 스칼라는 유리수
C = T.matrix(side='right')               # 표준행렬
x0 = vector(QQ, [2, -3, 3])
print C
print T.domain()                        # 정의역
print T.codomain()                       # 공역
print T(x0)                             # 이미지
print C*x0                              # 표준행렬과 벡터의 곱
```

```
[ 1  2  0]
[-1 -1  0]
[ 0  0  1]
[ 1  0  1]
Vector space of dimension 3 over Rational Field
Vector space of dimension 4 over Rational Field
(-4, 1, 3, 5)
(-4, 1, 3, 5)
```
■

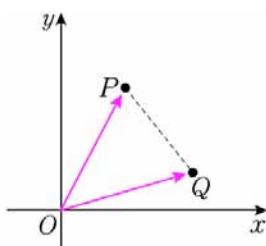
6.2 선형변환의 기하학적 의미

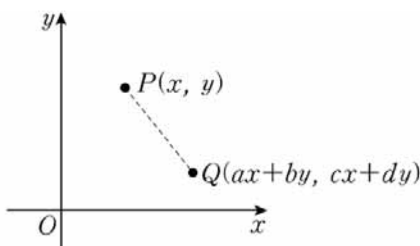
- 참고 동영상: http://youtu.be/12WP-cb6Ymc
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-8-Sec-6-2.html



이 절에서는 선형변환이 주는 기하학적 의미를 학습한다. 주어진 이미지에 작은 변화들을 주어 만들어진 여러 개의 이미지들을 연속하여 보여주면 동영상이 만들어진다. 선형변환은 컴퓨터그래픽과 수치적 알고리즘에 응용되며 애니메이션과 같은 영역에 절대적으로 필요한 도구이다.

R^2에서 R^2로의 일반적인 선형변환





- 선형변환 $T : R^2 \rightarrow R^2$이 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$로 정의될 때, 벡터 $\overrightarrow{OP} = (x, y)$는 선형변환 T에 의하여 다른 벡터 $\overrightarrow{OQ} = (ax+by, \ cx+dy)$로 옮겨진다.

예제 1 [회전, 대칭, 정사영] 다음은 몇 가지 형태의 R^2상의 선형변환의 예이다.

(1) $R_\theta : R^2 \rightarrow R^2$는 R^2 안의 벡터를 원점을 중심으로 θ만큼 시계 반대방향으로 회전하는 선형변환이다.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

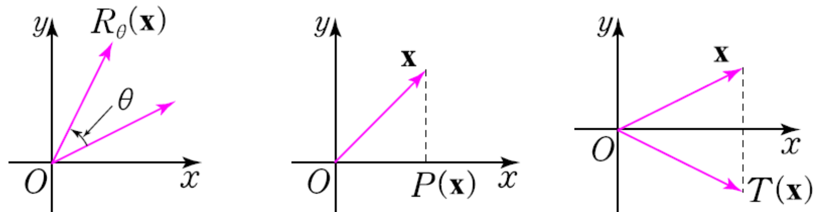
(2) x-축상의 정사영(orthogonal projection)은 $P: R^2 \rightarrow R^2$인 선형변환이다.

$$P(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) x-축에 대한 대칭이동 $T : R^2 \rightarrow R^2$는 선형변환이다.

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$ ■

- http://matrix.skku.ac.kr/sglee/LT/11.swf





2 R^2의 점 $P(x,\ y)$를 다음에 관하여 대칭으로 옮기는 선형변환의 표준행렬 A를 각각 구하여라.

(1) y축　　　　(2) 직선 $y = x$

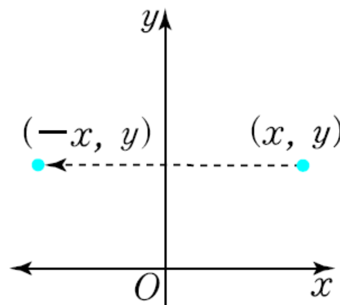
풀이

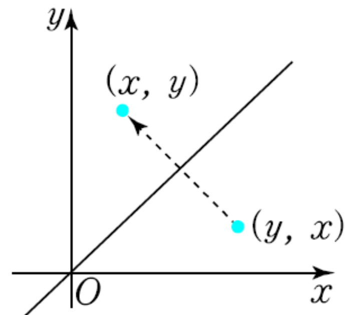
y축과 직선 $y = x$에 대한 대칭변환(선형)은 아래 그림에 나와 있는 것과 같다.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix},\qquad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ■

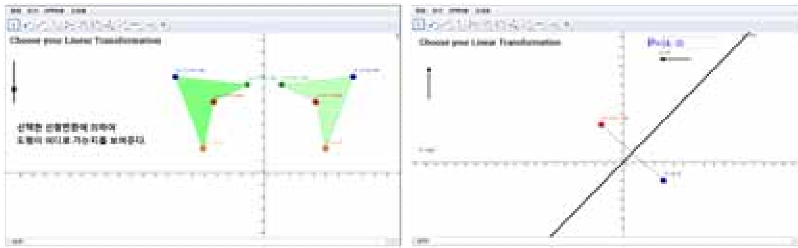
- http://matrix.skku.ac.kr/sglee/LT/22.swf
- http://matrix.skku.ac.kr/sglee/LT/44.swf
-





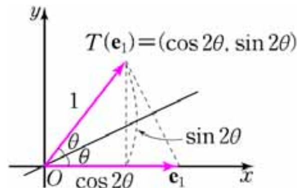
참고 시뮬레이션

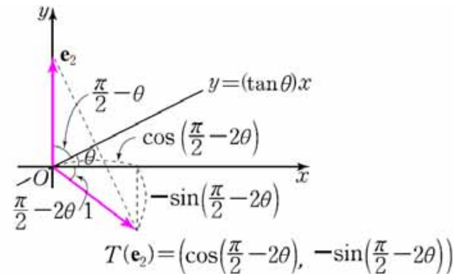
[선형변환] http://www.geogebratube.org/student/m9703
[대칭변환과 정사영변환] http://www.geogebratube.org/student/m9910
[회전] http://www.geogebratube.org/student/m9702



예제 3 선형연산자 $T : R^2 \rightarrow R^2$가 임의의 벡터 $\mathrm{x} = (x, y) \in R^2$를, 원점을 지나며 기울기가 θ인 직선에 대칭시키는 변환인 경우 변환행렬 $H_\theta = [T(\mathrm{e}_1) : T(\mathrm{e}_2)]$를 다음과 같이 구한다.

$$H_\theta = [T(\mathrm{e}_1) : T(\mathrm{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \\ \sin 2\theta & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \quad ■$$



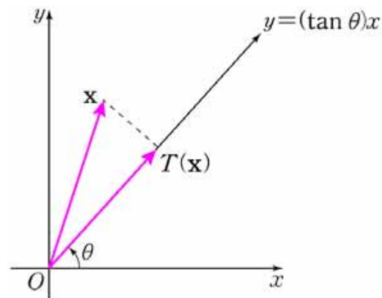


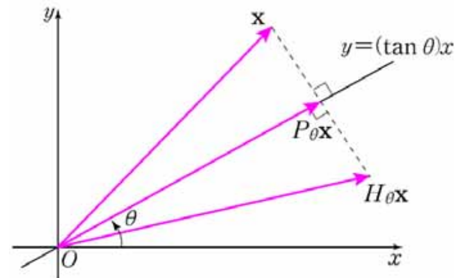
예제 4 선형변환(선형연산자) $T : R^2 \rightarrow R^2$를 그림과 같이 R^2상의 임의의 벡터 x를 x축과 이루는 각이 θ인 원점을 지나는 직선에 정사영시키는 정사영변환으로 정의하자. 그리고 주어진 변환 T에 대응하는 표준행렬을 P_θ라 하자.

$$P_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x}) \quad \text{(크기와 방향은 같고 길이는 절반)}$$

$$P_\theta \mathrm{x} = \frac{1}{2} H_\theta \mathrm{x} + \frac{1}{2}\mathrm{x} = \frac{1}{2} H_\theta \mathrm{x} + \frac{1}{2} I\mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta + I)\mathrm{x}$$

$$P_\theta = \frac{1}{2}(H_\theta + I) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \ ■$$



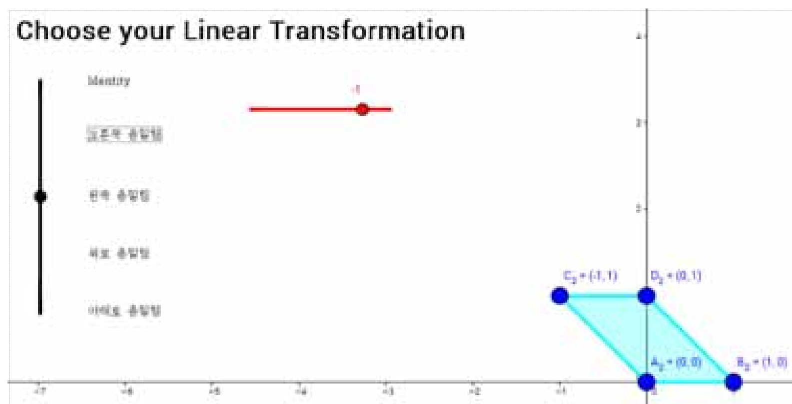


참고 층밀림(shear)변환(컴퓨터 시뮬레이션)

(1) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}$: x축 방향의 층밀림

(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ kx+y \end{bmatrix}$: y축 방향의 층밀림

- http://www.geogebratube.org/student/m9912



정의

길이가 보존되는 성질 $\|T(\mathrm{x})\| = \|\mathrm{x}\|$를 가지는 선형변환 $T: R^n \to R^n$을 Euclid isometry라 한다.

정리 6.2.1

만일 선형변환 $T : R^n \to R^n$가 R^n상의 선형연산자이면 아래는 동치이다.

(1) $\|T(\mathrm{x})\| = \|\mathrm{x}\|,\ \mathrm{x} \in R^n$ (길이보존, isometry)

(2) $T(\mathrm{x}) \cdot T(\mathrm{y}) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y},\ \mathrm{x},\ \mathrm{y} \in R^n$ (내적보존)

정의

정사각행렬 A에 대해 $A^{-1} = A^T$이면 A를 직교행렬(orthogonal matrix)이라 한다.

예제 5 임의의 실수 θ에 대하여 $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$는 직교행렬이고,

$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$이다. ■

예제 6 다음 행렬들이 직교행렬임을 확인하여라.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$


풀이

Sage를 이용하여 $A^TA = I,\ B^TB = I$ 임을 확인한다. □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/6-TF-orthogonal-matrix.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu

```
A=matrix(QQ, 2, 2, [3/5, -4/5, 4/5, 3/5])
B=matrix(3, 3, [1/sqrt(3), 1/sqrt(2), 1/sqrt(6),
                1/sqrt(3), -1/sqrt(2), 1/sqrt(6),
                1/sqrt(3), 0, -2/sqrt(6)])
print A.transpose()*A                    # 직교행렬 확인
print
print B.transpose()*B
```

```
[1 0]     [1 0 0]
[0 1]     [0 1 0]
          [0 0 1]
```

■

정리 6.2.2

n차의 정사각행렬 A에 대해, 다음이 성립한다.

(1) 직교행렬의 전치행렬은 직교행렬이다.
(2) 직교행렬의 역행렬은 직교행렬이다.
(3) 직교행렬의 곱은 직교행렬이다.
(4) A가 직교행렬이면, $\det A = 1$ 또는 -1이다.

증명 (1), (2)는 생략한다.

(3) 만일 $A^{-1} = A^T$, $B^{-1} = B^T$이면, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T$ 이므로 AB는 직교행렬이다.

(4) $1 = \det I = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det A)^2$

$\therefore\ \det A = 1$ 또는 -1 ■

정리 6.2.3

n차의 정사각행렬 A에 대해, 다음은 모두 동치이다.

(1) A가 직교행렬이다.
(2) $\|A\mathrm{x}\| = \|\mathrm{x}\|,\ \mathrm{x} \in R^n$
(3) $A\mathrm{x} \cdot A\mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y},\ \mathrm{x},\ \mathrm{y} \in R^n$
(4) A의 열벡터들은 정규직교이다.
(5) A의 행벡터들은 정규직교이다.

증명 (1) ⇒ (2): $\|A\mathrm{x}\|^2 = A\mathrm{x} \cdot A\mathrm{x} = < A\mathrm{x},\ A\mathrm{x} > = (A\mathrm{x})^T A\mathrm{x} = \mathrm{x}^T A^T A\mathrm{x}$

$$= \mathrm{x}^T A^{-1} A\mathrm{x} = \mathrm{x}^T \mathrm{x} = < \mathrm{x},\ \mathrm{x} > = \mathrm{x} \cdot \mathrm{x} = \|\mathrm{x}\|^2$$

(2) ⇒ (3): $\| A(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \|^2 = \| A\mathrm{x}+A\mathrm{y} \|^2 = \| A\mathrm{x} \|^2 + 2(A\mathrm{x} \bullet A\mathrm{y}) + \| A\mathrm{y} \|^2$

$$= \| \mathrm{x} \|^2 + 2(A\mathrm{x} \bullet A\mathrm{y}) + \| \mathrm{y} \|^2$$

이고

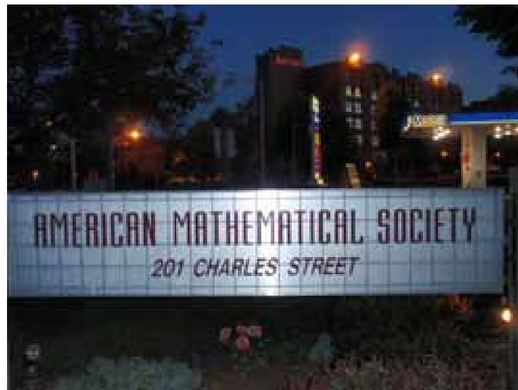
$$\| A(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \|^2 = \| \mathrm{x}+\mathrm{y} \|^2 = \| \mathrm{x} \|^2 + 2(\mathrm{x} \bullet \mathrm{y}) + \| \mathrm{y} \|^2$$

이므로 $A\mathrm{x} \cdot A\mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ 이 성립한다.

(3) ⇒ (1): $\forall i,\ \mathrm{e}_j{}^T A^T A \mathrm{e}_i = \mathrm{e}_i \cdot \mathrm{e}_j = < \mathrm{e}_i,\ \mathrm{e}_j > = \mathrm{e}_j{}^T \mathrm{e}_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$$\Rightarrow (A^T A)_{ij} = \sigma_{ij} \qquad \therefore\ A^T A = I_n$$

(1)에서 직교행렬의 정의($A^T A = I = AA^T$)로부터 (4), (5)는 바로 얻을 수 있으므로 자세한 증명은 생략한다. ■



[미국수학회 본부, Providence, RI, USA] http://www.ams.org

6.3 핵과 치역

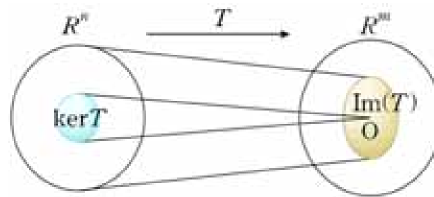
- 참고 동영상: http://youtu.be/H-P4lDgruCc
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-8-Sec-6-3.html



선형변환의 이미지가 영벡터인 정의역(R^n)의 부분집합이 부분공간이 됨을 보이고 이 부분공간이 갖는 성질을 알아본다. 또 모양은 다르지만 구조가 같은 부분공간들을 한 번에 설명할 수 있게 하는 선형사상을 소개한다.

정의

$T: R^n \to R^m$이 선형변환일 때, T에 의한 상이 $\mathbf{0}$이 되는 R^n 안의 벡터 전체의 집합을 T의 **핵(kernel)**이라 하고 $\ker T$로 나타낸다. 즉 $\ker T = \{\mathrm{v} \in R^n \mid T(\mathrm{v}) = \mathbf{0}\}$





예제 1 선형변환 $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x-y, 0)$에 대하여 $\ker T$를 구하여라.

풀이

$\ker T = \{(x, y) \in R^2 \mid (x-y, 0) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x\}$ ■



예제 2 선형변환 $T: R^4 \to R^4$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_2, x_3)$에 대하여 $\ker T$를 구하여라.

풀이

임의의 $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$에 대하여

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0} \iff x_i = 0,\ i = 1,2,3$$

이므로 $\ker T = \{(0, 0, 0, x_4) : x_4 \in R\}$ ■

정의

변환 $T : R^n \to R^m$가 $T(\mathrm{u}) = T(\mathrm{v}) \Rightarrow \mathrm{u} = \mathrm{v}$를 만족하면
단사(one-to-one; injective)라 한다.

정의

변환 $T : R^n \to R^m$가 임의의 $\mathrm{w} \in R^m$에 대해 $T(\mathrm{v}) = \mathrm{w}$인 $\mathrm{v} \in R^n$가 존재하면
전사(onto, surjective)라 한다.

정리 6.3.1

R^n, R^m이 벡터공간이고 $T : R^n \to R^m$가 선형변환일 때, T가 단사일 필요충분조건은 $\ker T = 0$이다.

증명 $(\Rightarrow)$ $\forall \mathrm{v} \in \ker T$, $T(\mathrm{v}) = 0 = T(0)$ 이고 T는 단사이므로
$\Rightarrow \mathrm{v} = 0 \quad \therefore \quad \ker T = \{0\}$

$(\Leftarrow)$ $T(\mathrm{v}_1) = T(\mathrm{v}_2) \Rightarrow 0 = T(\mathrm{v}_1) - T(\mathrm{v}_2) = T(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)$
$\Rightarrow \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 \in \ker T = \{0\} \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2$
$\therefore$ T는 단사이다. ■

예제 3 선형변환 $T : R^2 \to R^2$를 $T(x, y) = (y, x)$라고 정의하자. T는 단사인가?

풀이

$\ker T = \{\mathrm{x} \in R^2 \mid T(\mathrm{x}) = 0\} = \{(x, y) \mid T(x, y) = (0, 0)\}$이므로, 이를 만족하는 원소는 $(x, y) = (0, 0)$뿐이다.
따라서 $\ker T = \{(0, 0)\}$이므로 선형변환 T는 단사이다. ■

예제 4 선형변환 $T: R^3 \to R^3$를 $T(x, y, z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$로 정의하면 T는 단사인가?



$$T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

이므로 이 선형연립방정식은 무수히 많은 해를 가진다. 따라서 $\ker T \neq \{0\}$이고 **정리** 6.3.1에 의하여 T은 단사가 아니다. □

Sage풀이 http://sage.skku.edu

① 선형변환의 단사 여부 확인

```
U = QQ^3                                # 벡터공간
x, y, z = var('x, y, z')
h(x, y, z) = [x+2*y-z, y+z, x+y-2*z]
T = linear_transformation(U, U, h)      # 선형변환 생성
print T.is_injective()                  # 단사 확인
```

```
False
```

② 선형변환의 Kernel 구하기

```
T.kernel()                              # kernel을 구하여 확인
```

```
Vector space of degree 3 and dimension 1 over Rational Field
Basis matrix:
[  1 -1/3  1/3]         # kernel이 span( [1, -1/3, 1/3] )임을 뜻한다.   ■
```



A가 $m \times n$ 행렬일 때, 선형변환 $T: R^n \to R^m$를 $T(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$로 정의하면 $\ker T$는 $A\mathrm{x} = 0$인 동차연립방정식의 해공간이 된다.

정리 6.3.2

R^n, R^m이 벡터공간이고 $T : R^n \to R^m$가 선형변환일 때, $\ker T$는 R^n의 부분공간이다. 따라서 $\ker T$를 **핵공간(kernel)**이라 부른다.

예제 5

행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$의 kernel을 구하여라.

Sage풀이 http://sage.skku.edu

```
A = matrix(2, 2, [1, 1, 1, -1])
print A.right_kernel()                    # A의 kernel
```

```
Free module of degree 2 and rank 0 over Integer Ring
Echelon basis matrix:
[]                    # kernel에 0밖에 없음을 뜻한다.
```

■

정의 [동형사상]

선형변환 $T : R^n \to R^m$에 대하여, 임의의 $\mathrm{v} \in R^n$의 상 $T(\mathrm{v})$ 전체의 집합을 T의 **치역(range)**이라 하고 $\mathrm{Im}\,T$로 나타낸다. 즉,

$$\mathrm{Im}\,T = \{T(\mathrm{v}) \in R^m \mid \mathrm{v} \in R^n\} \subset R^m$$

특히, $\mathrm{Im}\,T = R^m$이면 T를 전사(surjective 또는 onto)라고 한다. 또, 선형변환 T가 단사이고 전사이면 T를 R^n에서 R^m으로의 **동형사상(isomorphism)**이라고 한다.

예제 6 에서 소개한 선형변환 $T(x, y) = (x - y, 0)$의 치역을 구하여라.

풀이

$\mathrm{Im}\,T = \{T(x, y) \mid (x, y) \in R^2\} = \{(x-y, 0) \mid (x, y) \in R^2\} = \{(a, 0) \mid a \in R\}$에서

$\mathrm{Im}\,T \neq R^2 \Rightarrow T$는 전사(surjective)가 아니다. ■

- T는 전단사가 아니므로, 동형사상이 될 수 없다.

예제 7 두 개의 집합 $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in R\}$, $W_2 = \{(0, 0, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in R\}$가 있다고 하자. 여기서 W_1과 W_2는 R^4의 부분공간이 됨을 쉽게 알 수 있다. 만일 $T: W_1 \to W_2$를 다음과 같은 선형변환으로 정의하자.

$$T(x, y, 0, 0) = (0, 0, x, y)$$

그러면 T는 전사이면서 단사이므로, 동형사상이다. ■

정리 6.3.3

선형변환 $T: R^n \to R^m$에 대하여, $\text{Im}\, T$는 R^m의 부분공간이다.

증명

$\forall\, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \text{Im}\, T,\ \exists\, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in R^n \ni\ T(\mathrm{v}_1) = \mathrm{w}_1,\ T(\mathrm{v}_2) = \mathrm{w}_2$

$\Rightarrow\ \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = T(\mathrm{v}_1) + T(\mathrm{v}_2) = T(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2)$

$\Rightarrow\ \exists\, \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 \in R^n \ni\ T(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2) = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in R^m \quad \therefore\ \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in \text{Im}\, T$

$\forall\, k \in R,\ k\mathrm{w}_1 = kT(\mathrm{v}_1) = T(k\mathrm{v}_1)$

$\Rightarrow\ \exists\, k\mathrm{v}_1 \in R^n \ni\ T(k\mathrm{v}_1) = k\mathrm{w}_1 \in R^m \quad \therefore\ k\mathrm{w}_1 \in \text{Im}\, T$

$\therefore$ $\text{Im}(T)$는 R^m의 부분공간이다. ■

예제 8 A가 $m \times n$ 행렬일 때, 선형변환 $T: R^n \to R^m$를 $T(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$로 정의하면 $\text{Im}\, T$는 행렬 A의 열공간임을 보여라.

풀이

$A^{(i)}$를 $m \times n$ 행렬 A의 i번째 열벡터라 하고 $A = [A^{(1)} : A^{(2)} : \cdots : A^{(n)}]$이라 하자. 그러면 임의의 벡터 $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$에 대하여

$$A\mathrm{x} = [A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(n)}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)}$$

이므로 전체집합은 A의 열벡터들의 일차결합으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$\therefore$ $\text{Im } T = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in R^n\} = < A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} >$ ■

정리 6.3.4

행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$에 대한 선형변환 $T_A : R^n \to R^m$는 다음 두 성질을 만족한다.

(1) T_A가 단사이다. $\Leftrightarrow$ A의 열벡터들이 일차독립이다.

(2) T_A가 전사이다. $\Leftrightarrow$ A의 행벡터들이 일차독립이다.

증명 (1) T_A가 단사 $\Leftrightarrow$ $\ker T_A = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$을 만족하는 $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in R^n$이 유일하게 존재한다.

$\Leftrightarrow$ A의 열벡터들이 일차독립이다.

(2) T_A가 전사 $\Leftrightarrow$ $\text{Im } T_A = R^m$

$\Leftrightarrow$ A의 열벡터들 $A^{(i)}$에 대하여

$\text{Im } T = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in R^n\} = < A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} > = R^m$

$\Leftrightarrow$ A의 RREF의 선행변수의 개수가 m개

$\Leftrightarrow$ A의 행벡터들이 일차독립이다. ■

예제 9

다음을 Sage를 이용하여 확인해보자.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이라 하자. $T_A : R^2 \to R^3$는 단사이지만, 전사는 아니다.

Sage풀이 http://sage.skku.edu

① 선형변환의 정의

```
U = QQ^2
V = QQ^3
A = matrix(QQ, [[1, 0], [0, 1], [0, 0]])
T = linear_transformation(U, V, A, side='right')        # 선형변환
print T
```

```
Vector space morphism represented by the matrix:
[1 0 0]
[0 1 0]
Domain: Vector space of dimension 2 over Rational Field
Codomain: Vector space of dimension 3 over Rational Field
```

② 선형변환의 전사 여부 확인

```
print T.image()            # 치역 생성
print T.is_surjective()    # 전사인지 확인
```

```
Vector space of degree 3 and dimension 2 over Rational Field
Basis matrix:
[1 0 0]
[0 1 0]
False
```

③ 선형변환의 단사 여부 확인

```
print T.kernel()           # kernel 생성
print T.is_injective()     # 단사인지 확인
```

```
Vector space of degree 2 and dimension 0 over Rational Field
Basis matrix:
[]
True
```

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하자. $T_A\ : R^3 \rightarrow R^2$는 전사이지만 단사는 아니다.

Sage풀이 http://sage.skku.edu

① 선형변환의 정의

```
U = QQ^3
V = QQ^2
A = matrix(QQ, [[1, 0, 0], [0, 1, 0]])
T = linear_transformation(U, V, A, side='right')      # 선형변환
print T
```

```
Vector space morphism represented by the matrix:
[1 0]
[0 1]
[0 0]
Domain: Vector space of dimension 3 over Rational Field
```

odomain: Vector space of dimension 2 over Rational Field

② 선형변환의 전사 여부 확인

```
print T.image()             # 치역 생성
print T.is_surjective()       # 전사인지 확인
```

```
Vector space of degree 2 and dimension 2 over Rational Field
Basis matrix:
[1 0]
[0 1]
True
```

③ 선형변환의 단사 여부 확인

```
print T.kernel()              # kernel 생성
print T.is_injective()          # 단사인지 확인
```

```
Vector space of degree 3 and dimension 1 over Rational Field
Basis matrix:
[0 0 1]
False
```
■

정리 6.3.5

행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$가 n차 정사각행렬이라 하자. 만일 $T_A : R^n \rightarrow R^n$가 선형연산자이면, T_A가 단사일 필요충분조건은 T_A가 전사이다.

증명 T_A가 단사 $\Leftrightarrow$ $\ker T_A = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ $A\mathrm{x}=0$을 만족하는 $\mathrm{x}=0\in R^n$이 유일하게 존재한다.

$\Leftrightarrow$ A의 RREF의 선행변수의 개수가 n개

$\Leftrightarrow$ A의 열벡터들 $A^{(i)}$에 대하여

$\mathrm{Im}\, T=\{A\mathrm{x} \mid \mathrm{x}\in R^n\}=< A^{(1)},\ A^{(2)},\ \ldots,\ A^{(n)} >=R^n$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, T_A = R^n$ $\Leftrightarrow$ T_A가 전사 ■

가역행렬의 동치정리

정리 6.3.6 [가역행렬의 동치정리]

행렬 A가 n차의 정사각행렬일 때, 다음은 동치이다.

(1) A의 열벡터들이 일차독립이다.
(2) A의 행벡터들이 일차독립이다.
(3) A의 모든 행(열)벡터는 R^n에서 일차독립이다.
(4) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 자명한 해 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$만을 갖는다.
(5) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 모든 $n \times 1$ 벡터 $\mathbf{b}$에 대하여 유일한 해를 갖는다.
(6) A는 I_n과 행동치이다.
(7) A는 가역이다.
(8) $\det(A) \neq 0$
(9) $\lambda = 0$은 A의 고유값이 아니다.
(10) T_A는 단사이다.
(11) T_A는 전사이다.

2012년 국제수학올림피아드 순위

		종합점수
1	한국	209
2	중국	195
3	미국	194
4	러시아	177
5	캐나다 태국	159
7	싱가포르	154
8	이란	151
9	베트남	148
10	루마니아	144

[2012년 국제수학올림피아드 순위]
https://www.imo-official.org/results.aspx

6.4 선형변환의 합성과 가역성

- 참고 동영상: http://youtu.be/qfAmNsdIPxc
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-8-Sec-6-4.html



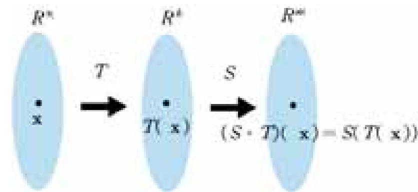
이 절에서는 두 개 또는 그 이상의 선형변환들이 연속적으로 수행되는 합성 변환 문제를 행렬의 곱과 연계하여 학습하고, 역함수와 행렬의 역행렬을 연계하여 선형연산자의 기하학적 성질을 학습한다.

정리 6.4.1 [합성함수]

$T: R^n \to R^k$와 $S: R^k \to R^m$이 모두 선형변환이면 합성함수

$$S \circ T: R^n \to R^m$$

도 선형변환이다.



정리 6.4.2

$T: R^n \to R^k$와 $S: R^k \to R^m$이 모두 선형변환일 때

(1) $S \circ T$가 단사이면, T가 단사이다.

(2) $S \circ T$가 전사이면, S가 전사이다.

증명 (1) 만일 $T(\mathrm{v}_1) = T(\mathrm{v}_2)$, $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in R^n$이라면, $S(T(\mathrm{v}_1)) = S(T(\mathrm{v}_2))$이므로

$\Rightarrow (S \circ T)(\mathrm{v}_1) = (S \circ T)(\mathrm{v}_2) \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2$ ($\because S \circ T$이 단사이므로)

$\therefore T$는 단사이다.

(2) $S \circ T$가 전사이면 $\forall \mathrm{z} \in R^m$에 대하여 $(S \circ T)(\mathrm{v}) = \mathrm{z}$을 만족하는 $\mathrm{v} \in R^n$가 존재한다.

즉, $S(T(\mathrm{v})) = \mathrm{z}$를 만족하는 $\mathrm{v} \in R^n$가 존재한다. $T(\mathrm{v}) = \mathrm{w} \in R^k$ 이므로, $S(\mathrm{w}) = \mathrm{z}$를 만족하는 $\mathrm{w} \in R^k$가 존재한다.

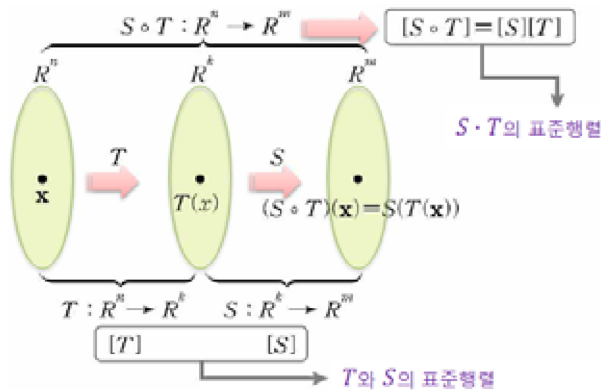
$\therefore S$는 전사이다. ■

선형변환이 합성된 경우 이에 대응하는 표준행렬은 각각의 표준행렬의 곱으로 표시된다.

- 즉, $T : R^n \to R^k$, $S : R^k \to R^m$일 때 $T : R^n \to R^k$가 표준행렬 $[T]$를 갖고, $S : R^k \to R^m$가 표준행렬 $[S]$를 갖는다고 하자. 그러면

$$S \circ T : R^n \to R^m \text{이고, } [S \circ T] = [S][T]$$

이다.



표준행렬이 A인 변환 T의 역변환 T^{-1}가 존재한다면 T^{-1}의 표준행렬은 A의 역행렬이다.

예제 1 $T, S : R^2 \to R^2$를 각각 θ_1과 θ_2(시계 반대방향으로) 각도만큼 회전변환시키는 선형변환이라고 하자. 이 변환에 대응하는 각각의 표준행렬은 다음과 같이 나타난다.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad [S] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

이 두 변환의 합성변환은 $\theta_1 + \theta_2$만큼의 회전변환이므로 $R = S \circ T$의 표준행렬을 고려해 보면 다음과 같다.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

또 T와 S에 대한 각각의 표준행렬의 곱은 다음과 같다.

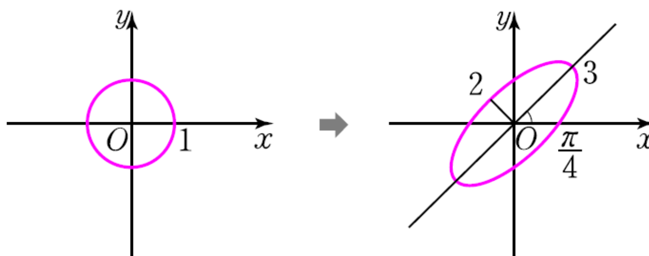
$$[S][T] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} = [R] = [S \circ T]$$

■

예제 2 아래 그림과 같이 반지름이 1인 원을 타원으로 변환시키는 행렬변환을 구하여라.





먼저 원을 x축 방향으로 3배, y축 방향으로 2배만큼 확대하는 변환을 취하고, 이어서 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전 변환한다. 처음 변환 T_1은 $T_1(x, y) = (3x, 2y)$이므로 T_1과 회전변환 T_2의 표준행렬은 각각

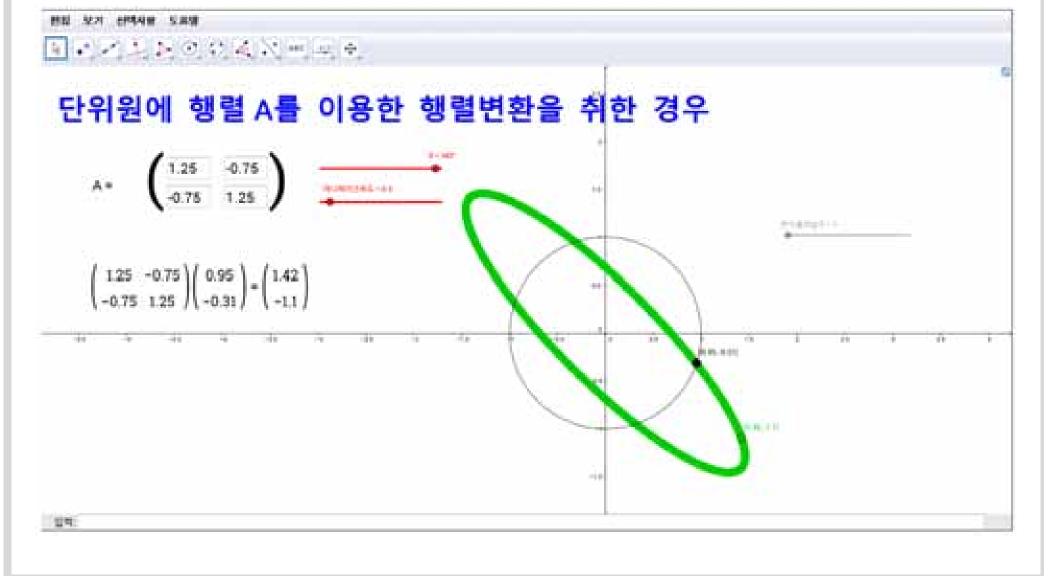
$$[T_1] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 합성변환의 표준행렬은 두 행렬의 곱

$$[T_2][T_1] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$ ■

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[행렬변환] http://www.geogebratube.org/student/m57556



- 같은 방법으로 세 개나 그 이상의 선형변환의 합성함수에 대하여도 그 합성함수에 대한 표준행렬은 각각의 표준행렬의 연산순서에 따른 곱으로 표시된다.

정리 6.4.3

함수 $f : X \to Y$가 가역일 필요충분조건은 f가 전사이면서 단사이다.

정리 6.4.4

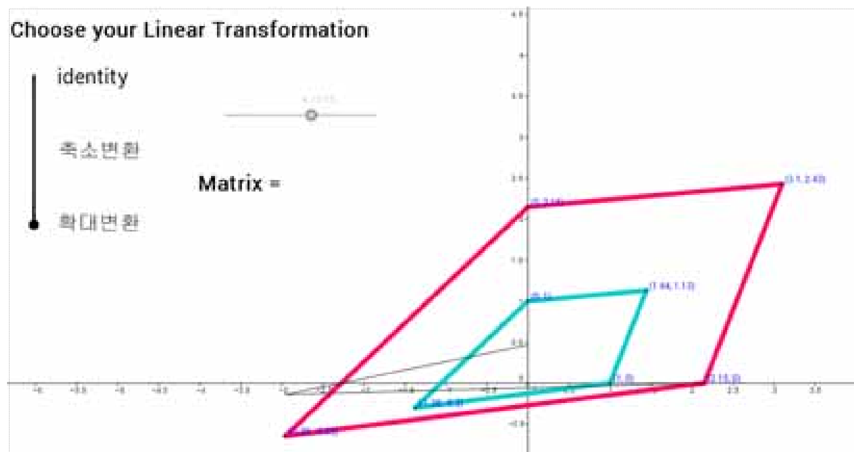
선형변환 $T : R^n \to R^n$이 가역이면 $T^{-1} : R^n \to R^n$도 선형변환이다.

- 합성변환의 역변환: $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$

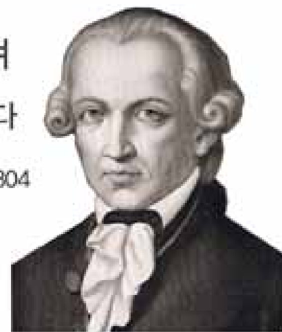
$$[S \circ T]^{-1} = ([S][T])^{-1} = [T]^{-1}[S]^{-1}$$

참고 컴퓨터 시뮬레이션

[축소변환과 확대변환] http://www.geogebratube.org/student/m11366



인간 철학은 모두 **직관**으로 시작하여
개념으로 나아가 아이디어로 끝난다
칸트 1724–1804



수학, 물리학에 대한 깊은 조예는
그의 **비판 철학**에 큰 바탕이 되었다

6.5 *Sage를 활용한 컴퓨터 그래픽

- 참고 동영상: http://youtu.be/VV5zzeYipZs
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-2.htm
  http://matrix.skku.ac.kr/Big-LA/LA-Big-Book-CG.htm



컴퓨터 그래픽은 자동차 설계나 비행 시뮬레이션, 게임 산업에서 핵심적 역할을 하고 있다. 예를 들면 자동차 모형과 같은 3차원 물체의 주요 데이터(점의 좌표)는 행렬로 저장된다. 이 점의 위치를 변환시키면, 생성된 새 점들로부터 변환된 물체를 다시 그릴 수 있다. 만약 이 변환들이 선형변환이면 변환된 데이터들은 행렬들의 곱셈에 의해 쉽게 얻어진다. 이 절에서는 컴퓨터 그래픽에 사용되는 몇 가지 기하학적 변환을 살펴보자.

선형변환의 기하적 의미 1(ploygon 이미지의 선형변환)

세 점 $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$을 지나는 삼각형과 이를 2배로 확대시킨 도형, x축으로 1배만큼 층밀림시킨 도형, 반시계방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전시킨 도형을 Sage를 이용하여 그려보자.

- 우선 위 선형변환을 정의하기 위해 우선 아래와 같이 행렬을 이용한 선형변환 함수를 입력한다.

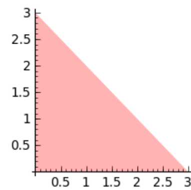
```
def matrix_transformation(A, L):
    n=matrix(L).nrows()    # list L의 성분의 개수
    L2=[[0,0] for i in range(n)]    # 새로운 list L2 정의
    for i in range(n):
        L2[i]=list(A*vector(L[i]))    # L2=A*L
    return L2    # L2 내보내기
print "The matrix_transformation function is activated"    # 적용되었는지 확인
```

- 그리고 문제에 조건에 맞는 표준행렬들을 정의한다.

```
A=matrix([[2,0], [0,2]])    # 주어진 이미지를 2배로 확대시키는 행렬
B=matrix([[1,1], [0,1]])    # 주어진 이미지를 x축으로 1배만큼 층밀림시키는 행렬
C=matrix([[cos(pi/3), -sin(pi/3)], [sin(pi/3), cos(pi/3)]])
                    # 주어진 이미지를 반시계방향으로 pi/3만큼 회전시키는 행렬
```

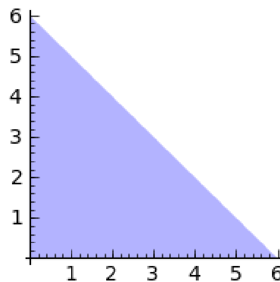
● ploygon 함수를 이용하여 세 점 $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$을 지나는 삼각형을 그린다.

```
L1=list( [ [0,0], [0,3], [3,0] ])   # 세 점을 입력
SL1=polygon(L1, alpha=0.3, rgbcolor=(1,0,0))   # 위 세 점을 지나는 도형 그리기
SL1.show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```



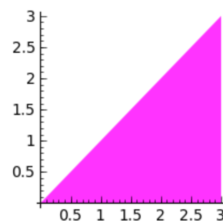
● 주어진 삼각형을 2배로 확대시킨 도형을 그린다.

```
L2=matrix_transformation(A, L1)   # 선형변환을 이용한 새로운 세 점 계산
SL2=polygon(L2, alpha=0.8, rgbcolor=(0,0,1))   # 위 세 점을 지나는 도형 그리기
SL2.show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```



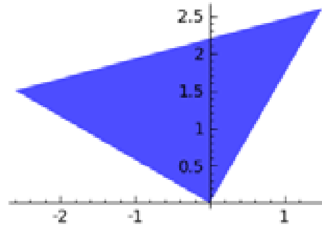
● 주어진 삼각형을 x축으로 1배만큼 층밀림시킨 도형 그린다.

```
L3=matrix_transformation(B, L1)   # 선형변환을 이용한 새로운 세 점 계산
SL3=polygon(L3, alpha=0.8, rgbcolor=(1,0,1))   # 위 세 점을 지나는 도형 그리기
SL3.show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```



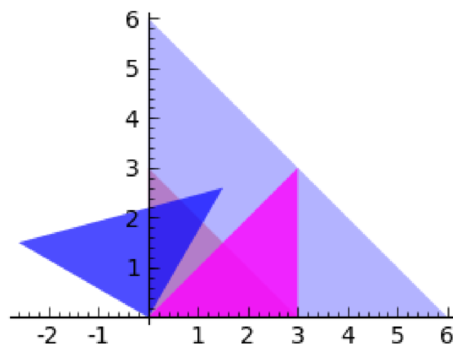
- 주어진 삼각형을 반시계방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 회전시킨 도형 그린다.

```
L4=matrix_transformation(C, L1)   # 선형변환을 이용한 새로운 세 점 계산
SL4=polygon(L4, alpha=0.4, rgbcolor=(0,0,1))   # 위 세 점을 지나는 도형 그리기
SL4.show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```



- 위의 네 도형들을 동시에 한 화면에 그린다.

```
(SL1+SL2+SL3+SL4).show(aspect_ratio=1, figsize=3)
```



선형변환의 기하적 의미 2(line 이미지의 선형변환)

평면상에 알파벳 S를 그리고, 이를 2배로 확대시킨 도형, x축으로 1배만큼 층밀림시킨 도형, 반시계방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전시킨 도형을 그려보자.

- 위 선형변환을 정의하기 위해 우선 아래와 같이 행렬을 이용한 선형변환 함수를 입력한다.

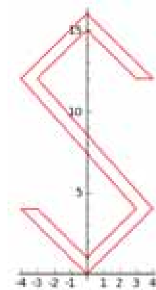
```
def matrix_transformation(A, L):
    n=matrix(L).nrows()     # list L의 성분의 개수
    L2=[[0,0] for i in range(n)]     # 새로운 list L2 정의
    for i in range(n):
        L2[i]=list(A*vector(L[i]))     # L2=A*L
    return L2     # L2 내보내기
print "The matrix_transformation function is activated"     # 적용되었는지 확인
```

- 그리고 문제에 조건에 맞는 표준행렬들을 정의한다.

```
A=matrix([[2,0], [0,2]])   # 주어진 이미지를 2배로 확대시키는 행렬
B=matrix([[1,1], [0,1]])   # 주어진 이미지를 x축으로 1배만큼 층밀림시키는 행렬
C=matrix([[cos(pi/3), -sin(pi/3)], [sin(pi/3), cos(pi/3)]])
                          # 주어진 이미지를 반시계방향으로 pi/3만큼 회전시키는 행렬
```

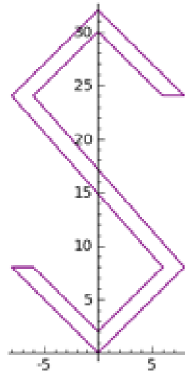
- line 함수를 이용하여 알파벳 S를 그린다.

```
L1=list( [ [0,0], [4,4], [-3,12], [0,15], [3,12], [4,12], [0,16], [-4,12], [3,4],
       [0,1], [-3,4], [-4,4], [0,0] ])   # 알파벳 S를 구성하는 점들 입력
SL1=line(L1, color="red")   # 위 점들을 지나는 도형 그리기
SL1.show(aspect_ratio=1, figsize=5)
```



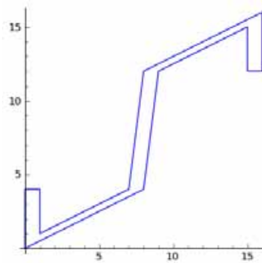
● 알파벳 S를 2배로 확대시킨 도형을 그린다.

```
L2=matrix_transformation(A, L1)   # 선형변환을 이용한 새로운 점들의 좌표 계산
SL2=line(L2, color="purple")   # 위 점들을 지나는 도형 그리기
SL2.show(aspect_ratio=1, figsize=5)
```



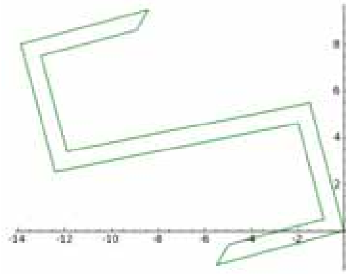
● 알파벳 S를 x축으로 1배만큼 층밀림시킨 도형을 그린다.

```
L3=matrix_transformation(B, L1)   # 선형변환을 이용한 새로운 점들의 좌표 계산
SL3=line(L3, color="blue")   # 위 점들을 지나는 도형 그리기
SL3.show(aspect_ratio=1, figsize=5)
```



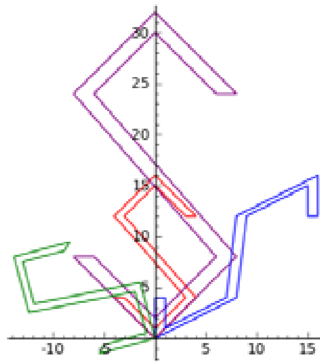
● 알파벳 S를 반시계방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전시킨 도형을 그린다.

```
L4=matrix_transformation(C, L1)   # 선형변환을 이용한 새로운 점들의 좌표 계산
SL4=line(L4, color="green")   # 위 점들을 지나는 도형 그리기
SL4.show(aspect_ratio=1, figsize=5)
```



● 위의 네 도형들을 동시에 한 화면에 그린다.

```
(SL1+SL2+SL3+SL4).show(aspect_ratio=1, figsize=5)
```



http://modular.math.washington.edu/
[William Stein : Sage 최초 개발자]





[Sage 개발자 그룹]



[Sage 초기 코드 개발자들: 선형대수학]

Chapter 6 연습문제

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm

문제 1 다음 변환 $T : R^3 \to R^3$ 가 선형변환임을 확인한 후 $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$에 대한 $\mathrm{x} = (1, 2, 3)$의 이미지 $T(\mathrm{x})$를 구하여라.

문제 2 표준기저를 이용하여 다음 선형변환의 표준행렬 $[T]$를 구하여라.
$T(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$

문제 3 선형변환 $T : R^2 \to R^2$이 다음 조건을 만족하는 경우 물음에 답하여라.
$T(1, 0) = (2, 3)$, $T(0, 1) = (-1, 1)$

(1) $T(-1, 1)$을 구하여라.

(2) $T(x, y)$를 구하여라.

문제 4 임의의 벡터 $\mathrm{x} \in R^2$를 원점을 지나고 x축과 이루는 각이 θ인 직선에 대칭 이동시키는 변환 $T : R^2 \to R^2$에 대하여 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$의 이미지 $T(\mathrm{x})$를 구하여라.

문제 5 다음 행렬이 직교행렬인지 확인하고, 직교행렬인 경우 그의 역행렬을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

문제 6 다음에 주어진 선형변환의 핵(kernel)과 치역(range)을 구하고 전단사를 판정하여라.

(1) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$

(2) $S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 9x_2 \\ -3x_2 - x_1 \end{bmatrix}$

문제 7 아래와 같이 T_1과 T_2가 정의되었을 때 다음 물음에 답하여라.

$T_1(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, -2x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2)$,

$T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, -x_3, 4x_1 - x_3)$

(1) T_1과 T_2의 표준행렬을 각각 구하여라.

(2) $T_2 \circ T_1$과 $T_1 \circ T_2$의 표준행렬을 각각 구하여라.

문제 8 x, z $\in R^2$가 두 개의 선형변환 T, S에 의하여

$T(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $S(\mathrm{z}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ -z_1 + z_2 \end{bmatrix}$로 이동한다고 하자.

이때, $S \circ T(\mathrm{x})$를 구하여라.

문제 9 다음 물음에 답하여라.

(1) 다음 행렬의 영공간(null space)의 차원을 Sage를 이용하여 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 9 & 8 & 4 & -2 \\ -4 & 3 & 8 & 11 & -5 & 2 \\ 11 & 0 & -2 & 4 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) w$= (5, -2, -3, 6)$가 위의 행렬에 대응하는 선형변환 T_A의 치역(range)에 있는지 없는지 Sage를 이용하여 확인하여라.

문제 P1 $R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$일 때 $R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$이 어떤 점으로 이동하는지를 Sage를 이용하여 확인하여라.

(Sage: http://math1.skku.ac.kr/home/pub/749)

C O M 2 M A C / P O S T E C H

POSTECH Com2MaC 1999

Com²MaC Conference on COMBINATIONAL MATRIX THEORY

Jan. 14 ~ Jan. 17, 2002

Pohang University of Science and Technology

Sponser >> Korea Science and Engineering Foundation

CONFERENCE THEME

Combinatorics, Combinatorial Matrix Theory and related areas of Computational and core Matrix Theory.

CONFERENCE CHAIRS

Richard A. Brualdi (Univ. of Wisconsin-Madison, U.S.A)
Suk-Geun Hwang (Kyungpook Univ., Korea)

INTERNATIONAL ADVISORY COMMITTEE

Arnold Kräuter (Univ. of Leoben, Austria)
Bryan Shader (Univ. of Wyoming, U.S.A)
Jia-Yu Shao (Tongji Univ., P. R. China)

STEERING COMMITTEE

Han-Hyuk Cho (Seoul National Univ., Korea)
HyunKwang Kim (POSTECH, Korea)
Sang-Gu Lee (SungKyunKwan Univ., Korea)

INVITED SPEAKERS

Steve Kirkland (Plenary) (Univ. of Regina, Canada)
Jian Shen (Plenary) (Queen's Univ., Canada)
Kazuyoshi Okubo (Hokkaido Univ. of Education, Japan)
Jason Zhongshan Li (Georgia State Univ. U.S.A)
Charles Johnson (College of William and Mary, U.S.A)
Chan Onn (Singapore Nat. Univ. Singapore)
Ian Wanless (U.K)
Daniel Hershkowitz (Technion, Israel)
Hans Schneider (Univ. of Wisconsin-Madison, U.S.A)
Bit-Shun Tam (Tamkang Univ. Taipei, Taiwan)
Prasad Tetali (Georgia Institute of Technology, GA, U.S.A)
Miroslav Fiedler (Czech Academy of Sciences, Czech Rep.)
T. S. Michael (U.S. Naval Academy, U.S.A)
Fuzhen Zhang (Nova Southeastern Univ. FL.)
Yunsun Nam (Samsung Advanced Research Institute, Korea)
Bolian Liu (South China Normal Univ., Guangzhou, China)
Jennifer Seberry (Univ. of Wollongong, Australia)
Li Qiao (Shanghai Jiao Tong Univ., China)
Willem Haemers (Katholieke Univ Brabant, Tilburg, Netherlands)
Yang Yu (Caltech, Pasadena, U.S.A)

REGISTERED SPEAKERS

Bryan McKay (Australian National Univ., Australia)
Andrew Vince (Univ. of Florida, U.S.A)
Leslie Hogben (Iowa State Univ., U.S.A)
Gautami Bhowmik (Univ. Lille I, France)
SATO Kenzi (Tamagawa Univ., Japan)
Xingzhi Zhan (Peking Univ. now at Tohoku Univ., Japan)
Tsuyoshi Ando (Hokusei Gakuen Univ., Japan)
Armen Gasparyan (Yaroslavl Region, Russia)
Carlos Martins da Fonseca (Univ. de Coimbra, Portugal)

SU. S. A. na Furtado (Univ. of Porto, Portugal)
Gi-Sang Cheon (Daejin Univ., Korea)
Ching-I Hsin (Minghsin Institute of Technology, Taiwan)
Gwang-Yeon Lee (HanSeo Univ., Korea)
Mikhail Shchukin (Belarussian State Univ., Minsk)
Carlos Saiago (Univ. Nova de Lisboa, Portugal)
Shaun Fallat (Univ. of Regina, Canada)
LeRoy Beasley (Utah State Univ., U.S.A)
Uriel G. Rothblum (IEM, Technion, Israel)
Cora Neal (Weber State Univ., U.S.A)
Suk-Zun Song (Cheju National Univ., Korea)
Sang-Wook Lee (Univ. of Suwon, Korea)
Young-Mee Koh (Univ. of Suwon, Korea)
Mark Hoher Sigger
Han-Guk Seol (Sungkyunkwan Univ., Korea)
Jin-Soo Kim (Sungkyunkwan Univ., Korea)
In-Jae Kim (Univ. of Wyoming, U.S.A)
Ran Back (Hoseo Univ., Korea)
Kil-Chan Ha (National Security Research Institute in ETRI, Taejon, Korea)
Geum Suk Hwang (PU.S.A.n Univ. of Foreign Study)

PUBLICATION

Participants presenting papers are invited to submit them for possible publication in a special issue of the international journal:

Linear Algebra and Its Applications (LAA)

to one of the special editors; Suk-Geun Hwang, Arnold Kräuter, Bryan Shader, and Jia-yu Shao. Papers will be refereed in accordance with the normal high standards of LAA. April 30, 2002 is the deadline for paper to be submitted to one of the special editors.

EXCURSION

An excursion to Kyongju will take place on Wednesday afternoon. Kyongju was the capital of Shilla Kingdom (57 BC- 935 AD) and is Korea's tourist Mecca. The cost for the excursion including transportation, entrance fees, and dinner is US$50. Nearby attractions.

浦項工科大學校 전산수학연구센터

Com²MaC, POSTECH, Pohang 790-784, Korea

Phone +82-54-279-8020 Fax +82-54-279-5511 E-mail com2mac@postech.ac.kr URL http://com2mac.postech.ac.kr

[2002년 조합적 행렬론 국제학회] http://matrix.skku.ac.kr/sglee/postech/

Chapter 7

차원과 부분공간

7.1 기저와 차원의 성질
7.2 행렬이 갖는 기본공간들
7.3 차원정리(Rank-Nullity 정리)
7.4 Rank 정리
7.5 정사영(Projection) 정리
*7.6 최소제곱해(least square solution)
7.7 Gram-Schmidt의 정규직교화과정
7.8 QR-분해; Householder transformations
7.9 좌표벡터
연습문제

벡터공간 은 기저(basis)를 가집니다. 그리고 기저는 벡터공간을 이해하는 열쇠(key)입니다. 또 벡터공간의 부분집합인 기저는 무수히 많은 원소를 갖는 여러 벡터공간들의 크기를 비교하는 도구가 됩니다. 벡터공간의 크기와 구조에 대한 이해는 개념의 시각화와 데이터들의 효과적인 이용이 가능하게 해 줍니다.

이 장에서는 먼저 기저와 차원을 정의하고 그 성질에 대하여 학습하겠습니다. 그리고 행렬의 기본공간인 열공간, 행공간, 영공간에 대해서 학습하고 그 공간들 사이의 관계인 차원정리를 유도할 것입니다. 그리고 1장에서 정의한 에서의 정사영을 으로 확장하고 선형변환으로서의 정사영에 대응하는 표준행렬을 생각하겠습니다. 이는 Gram-Schmidt 정규직교화 과정과 QR-분해의 이론적 기초가 됩니다.

에 대한 모든 기저의 원소 개수는 항상 개이지만, 기저의 모양은 다양합니다. 의 모든 (nontrivial) 부분공간은 기저를 가진다는 것을 보이고, 이 기저로부터 정규직교기저를 찾는 방법에 대하여 알아보겠습니다. 표준기저가 아닌 다른 기저에 대한 (주어진) 벡터의 좌표벡터 표현을 소개하고 이어서 이 두 표현 사이를 연결시켜주는 행렬을 알아보겠습니다.

선형대수학

7.1 기저와 차원의 성질

- 참고 동영상: http://youtu.be/172stJmormk
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-9-sec-7-1.html



표준기저는 배웠고, 이제 차원의 개념을 설명할 것이다. 우리는 공간에 시간의 축을 하나 보태어 4차원이라는 개념을 배웠다. 그렇다면 수학적으로 벡터공간의 차원은 어떤 의미를 갖는가? 이 절에서는 R^n을 생성하는 일차독립 집합으로부터 기저와 차원을 정의하고, 그 성질을 학습한다.

벡터공간의 기저

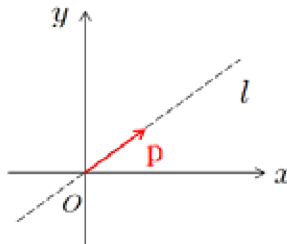
정의 [기저]

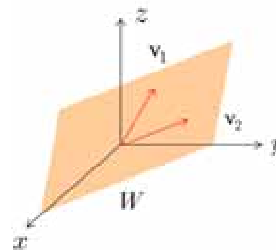
R^n의 부분집합 $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_s\}$가 아래 두 조건을 만족하면 S를 R^n의 **기저(basis)**라 한다.

(1) S가 일차독립
(2) $\mathrm{span}(S) = R^n$

예제 1 (1) V를 R^n상의 원점을 지나는 **직선(line)**이라 하면, V의 임의의 영 아닌 벡터는 V의 기저를 이룬다.

(2) V를 R^n상의 원점을 지나는 **평면(plane)**이라 하면, V의 임의의 서로 상수배가 아닌 영 아닌 두 벡터는 V의 기저를 이룬다. ■





예제 2 R^2의 기본단위벡터 $\mathrm{e}_1 = (1, 0)$, $\mathrm{e}_2 = (0, 1)$에 대하여 $S = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$라 할 때, S는 일차독립이고 R^2를 생성하므로 S는 R^2의 기저이다. ■

- 일반적으로 $S = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n\}$라 정의하면 집합 S는 R^n의 기저이다. 이 S를 R^n의 **표준기저(standard basis)**라고 한다.

R^n상의 벡터들의 일차독립성을 보이는 방법

$$c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_m\mathrm{x}_m = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

- $A = [\mathrm{x}_1 : \mathrm{x}_2 : \cdots : \mathrm{x}_m]$는 x_i들을 **열벡터(column vector)**로 가지는 행렬, $\mathrm{c} = [c_1 \cdots c_m]^T$라 하자. 그렇다면 벡터들이 일차독립임을 보이기 위해서는 동차연립방정식 $A\mathrm{c} = 0$이 유일한 해 $\mathrm{c} = 0$을 가져야 한다. 특히 $m = n$일 경우 $\det A \neq 0$이면 유일해를 갖는다.

정리 7.1.1

벡터공간 R^n에서 n개의 (열)벡터

$$\mathrm{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \ \ldots, \ \mathrm{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn})$$

이 일차독립일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

증명 임의의 $c_1, \ldots, c_n \in R$에 대하여

$$c_1\mathrm{x}_1 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n = 0$$

$$\Rightarrow c_1\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n\begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

이므로 다음 연립방정식을 얻는다. 즉,

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

이 자명한 해 $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \mathbf{0}$, 즉 $c_1 = 0, \ \ldots, \ c_n = 0$만을 갖기 위한 필요충분조건은 $\Delta \neq 0$ 이다. 그러므로 $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$이 일차독립일 필요충분조건은 $\Delta \neq 0$ 이다. ■

예제 3

위의 행렬식을 이용한 일차독립 판정법을 이용하여 R^3의 세 벡터

$$\mathrm{x}_1 = (1, 2, 3), \quad \mathrm{x}_2 = (-1, 0, 2), \quad \mathrm{x}_3 = (3, 1, 1)$$

에 적용하면 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ 이므로 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$는 일차독립임을 알 수 있다. □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/7-TF-linearly-independent.html





http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

```
x1=vector([1, 2, 3])
x2=vector([-1, 0, 2])
x3=vector([3, 1, 1])
A=column_matrix([x1, x2, x3])        # x1, x2, x3를 열벡터로 하는 행렬 생성
print A.det()
```

9 ■

예제 4

$S' = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$외에 R^3의 벡터 $\mathrm{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathrm{x}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathrm{x}_3 = (1, 1, 1)$를 원소로 하는 집합 $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$도 R^3의 기저임을 보여라.

풀이

$S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$가 R^3의 기저임을 보이려면 S가 일차독립이고 R^3를 생성함을 보이면 된다. □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

```
A=matrix(QQ, 3, 3, [1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1])
print A.det()
```

```
1
```

■

- 위에서 행렬식이 0이 아니므로 $S=\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$는 일차독립이다. 이제 S가 R^3를 생성함을 보이자. R^3의 임의의 벡터 $\mathrm{x} = (x, y, z)$를 $\mathrm{x} = c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + c_3\mathrm{x}_3$ 라 놓으면,

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= c_1(1, 0, 0) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 1, 1), \ (c_i \in R) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3, \ c_2 + c_3, \ c_3)\end{aligned}$$

이므로 c_1, c_2, c_3에 관한 연립방정식

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x \\ c_2 + c_3 &= y \\ c_3 &= z \end{aligned} \qquad (1)$$

을 얻는다.

따라서 S가 R^3를 생성함을 보이려면 위 연립방정식 (1)이 항상 해를 가짐을 보이면 된다. 실제로, 연립방정식 (1)의 계수행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$은 가역행렬이므로 항상 해를 갖는다. 따라서 S는 R^3의 기저이다.

정리 7.1.2

집합 $S=\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n\}$이 R^n의 기저일 때, R^n의 $r(>n)$개의 벡터들의 집합 $T=\{\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_r\}$은 항상 일차종속이다. 그러나 T가 일차독립이면 언제나 $r \le n$이다.

증명 http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap7/Page6.htm

S가 R^n의 기저이므로 집합 $T=\{\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_r\}$에 속하는 모든 벡터는 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$의 일차결합으로 표시된다. 즉 $a_{ij} \in R$에 대하여

$$\mathrm{y}_j = \mathrm{a}_{1j}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{2j}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{nj}\mathrm{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}_{ij}\mathrm{x}_i, \ (j = 1, 2, \ldots, r) \qquad (2)$$

이다. 이제 임의의 $c_1, c_2, \ldots, c_r \in R$에 대하여,

$\sum_{j=1}^{r} c_j \mathrm{y}_j = c_1\mathrm{y}_1 + c_2\mathrm{y}_2 + \cdots + c_r\mathrm{y}_r = 0$이라 하면 식 (2)로부터 다음을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\, c_j\right)\mathrm{x}_i = \sum_{j=1}^{r} c_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{x}_i\right) = 0$$

$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$이 일차독립이므로

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\, c_j = 0, \quad (\forall\, i = 1, 2, \ldots, n)$$

즉, 다음 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} a_{11}\, c_1 + \cdots + a_{1r}\, c_r &= 0 \\ a_{21}\, c_1 + \cdots + a_{2r}\, c_r &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{n1}\, c_1 + \cdots + a_{nr}\, c_r &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

식 (3)은 r개의 미지수 $c_1, c_2, \cdots, c_r$을 갖고 n개의 식으로 된 동차연립방정식이다. 그런데 $r > n$이므로 동차연립방정식 (3)은 자명하지 않은 해를 갖는다. 따라서 T는 일차종속이다. ■

정리 7.1.3

집합 $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n\}$과 $T = \{\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_m\}$이 R^n의 기저이면 $n = m$이다.

- R^n의 기저는 무수히 많다. 그러나 각 기저에 속하는 벡터의 개수는 항상 같다.

정의 [차원]

집합 S가 R^n의 한 기저일 때, S에 속하는 벡터의 개수를 R^n의 **차원(dimension)**이라 하며 $\dim R^n$로 나타낸다.

- $\dim R^n = n$이다. 만일 부분공간 V가 영부분공간 $\{0\}$이라면, $\dim V = 0$이다.

정리 7.1.4

R^n 안의 n개 벡터들의 집합 $S=\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n\} \subseteq R^n$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 집합 S가 일차독립이면 S는 R^n의 기저이다.
(2) 집합 S가 R^n을 생성하면 (즉, $<S>=R^n$이면), S는 R^n의 기저이다.

예제 5 3차원 공간 R^3 안의 세 개의 벡터 $\mathrm{x}_1=(1, 2, -1)$, $\mathrm{x}_2=(1, 3, 1)$, $\mathrm{x}_3=(2, 0, 0)$는

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

이므로 $S=\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$은 일차독립이다.
따라서 S는 R^3의 기저이다. ■

정리 7.1.5

$S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k\}$을 R^n의 부분공간 V의 기저라 하면, V의 모든 벡터 v는 기저 벡터들의 유일한 일차결합으로 표현된다.

증명 S가 V를 생성하므로 V의 임의의 원소 v는 S의 일차결합으로 표현할 수 있다. 이제

$$\mathrm{v}=t_1\mathrm{v}_1+t_2\mathrm{v}_2+\cdots+t_k\mathrm{v}_k\text{이면서, } \mathrm{v}=t'_1\mathrm{v}_1+t'_2\mathrm{v}_2+\cdots+t'_k\mathrm{v}_k\text{라 하자.}$$

두 식을 빼면

$$0=(t_1-t'_1)\mathrm{v}_1+(t_2-t'_2)\mathrm{v}_2+\cdots+(t_k-t'_k)\mathrm{v}_k$$

이다. S가 일차독립이므로 $t_1-t'_1=0,\ t_2-t'_2=0,\ \cdots,\ t_k-t'_k=0$이다.
따라서 $\mathrm{v}=t_1\mathrm{v}_1+t_2\mathrm{v}_2+\cdots+t_k\mathrm{v}_k$는 유일하다. ■

예제 6 $S=\{v_1=(1, 0, 0), v_2=(0, 1, 0), v_3=(0, 0, 1), v_4=(1, 1, 1)\}$이라 하자. 그러면

$$v=(3, 4, 5)=3v_1+4v_2+5v_3+0v_4$$

이다. 그러나

$$v=(3, 4, 5)=4(1, 0, 0)+5(0, 1, 0)+6(0, 0, 1)-(1, 1, 1)$$

또는

$$v=(3, 4, 5)=2(1, 0, 0)+3(0, 1, 0)+4(0, 0, 1)+(1, 1, 1)$$

으로 표현가능하다. 이유는 집합 S는 R^3의 기저가 아니기 때문이다. ■

시인의 기질을 갖추지 않고서는
결코 훌륭한 **수학자**가 될 수 없다

바이어슈트라스 1815-1897

" Weierstrass Theorem "
현대해석학 의 아버지



7.2 행렬이 갖는 기본공간들

- 참고 동영상: http://youtu.be/8P7cd-Eh328
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-9-sec-7-2.html

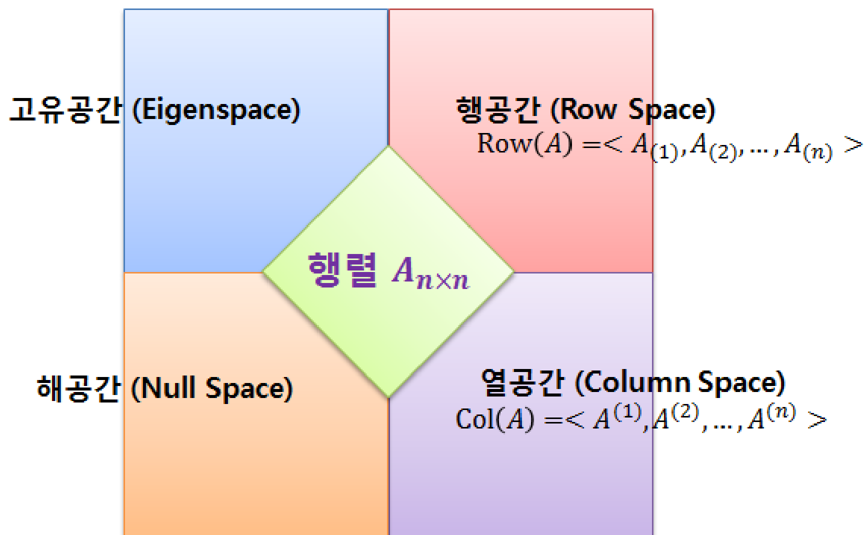


하나의 $m \times n$ 행렬은 행공간, 열공간, 영공간, 고유공간 등 네 가지의 중요한 부분공간을 갖는다. 이 부분공간들은 행렬 A와 관련된 다양한 대수적, 기하학적 성질, 선형연립방정식의 해공간들을 규명하는 도구가 된다. 이 절에서는 영공간의 기저를 찾는 방법과 행공간, 열공간 사이의 관계에 대하여 알아본다.

고유공간과 해공간(null space)

정의 [해공간, 영공간]

$n \times n$ 행렬 A의 고유값 λ에 대한 고유공간 $\{x \in R^n \mid Ax = \lambda x\}$은 R^n의 부분공간이다. 또한 동차연립방정식 $Ax = 0$의 해집합도 R^n의 부분공간이다. 이를 동차연립방정식 $Ax = 0$의 **해공간(solution space)** 혹은 행렬 A의 **영공간(null space)**이라 하며 기호로 $\text{Null}(A)$로 나타낸다.



해공간의 기저와 차원

- Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 행렬 $[B\ :\ 0]$을 선형연립방정식의 첨가행렬 $[A\ :\ 0]$의 RREF라 하고 행렬 B는 첫 행부터 $r\,(1 \le r \le n)$개의 영이 아닌 행을 갖는다고 하자.

(1) $r = n$이면 $A\mathbf{x} = 0$의 해는 $\mathbf{x} = 0$만을 갖는다. 따라서 해공간의 차원은 0이다.

(2) $r < n$이면 (필요한 경우 열을 교환하면―변수의 위치만 변경하면 되므로) 일반성을 잃지 않고

$$[B\ :\ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1r+1} \cdots b_{1n} & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{2r+1} \cdots b_{2n} & : & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{rr+1} \cdots b_{rn} & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \ \cdots \ 0 & : & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \ \cdots \ 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

라고 할 수 있다. 그러면, 선형연립방정식은 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned} x_1 &= -b_{1\,r+1}x_{r+1} - b_{1\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{1\,n}x_n \\ x_2 &= -b_{2\,r+1}x_{r+1} - b_{2\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{2\,n}x_n \\ &\ \ \vdots \\ x_r &= -b_{r\,r+1}x_{r+1} - b_{r\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{r\,n}x_n \end{aligned}$$

즉, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$은 $n-r$개의 자유변수이다. 따라서 임의의 실수 $s_1, \ldots, s_{n-r}$에 대하여 $x_{r+1} = s_1, \ldots, x_n = s_{n-r}$이라 하면, 연립방정식의 일반해는 다음과 같이 $n-r$개 벡터들의 일차결합으로 표현이 가능하다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ x_{r+3} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} -b_{1\,r+1} \\ -b_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} -b_{1\,r+2} \\ -b_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + s_{n-r} \begin{bmatrix} -b_{1\,n} \\ -b_{2\,n} \\ \vdots \\ -b_{r\,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

여기서, $s_1, \ldots, s_{n-r}$이 임의의 실수이므로

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} -b_{1\,r+1} \\ -b_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} -b_{1\,r+2} \\ -b_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathrm{v}_{n-r} = \begin{bmatrix} -b_{1\,n} \\ -b_{2\,n} \\ \vdots \\ -b_{r\,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

도 연립방정식의 해이다. 따라서 위의 모든 $n-r$개의 벡터들의 일차결합 해는

$$\mathrm{x} = s_1\mathrm{v}_1 + s_2\mathrm{v}_2 + \cdots + s_{n-r}\mathrm{v}_{n-r}$$

로 표현되므로 $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_{n-r}\}$는 $A\mathrm{x}=0$의 해공간을 생성한다. 또, S가 일차독립임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 S는 이 해공간 $\{\mathrm{x}\in R^n \mid A\mathrm{x}=0\}$ 의 기저이고 이 해공간의 차원은 $n-r$ 이다.

정의 [영공간의 차원]

$m\times n$ 행렬 A에 대하여 $A\mathrm{x}=0$ 의 해공간, 즉 A의 영공간의 차원을 nullity(A)라고 나타낸다. 즉, dim Null(A)=nullity(A)이다.

예제 1 다음 행렬 A에 대하여 $A\mathrm{x}=0$의 해공간의 기저와 차원을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

풀이

$A\mathrm{x}=0$의 첨가행렬 $[A \ \vdots \ 0]$의 RREF를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

따라서 일반해는

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2-2x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-2t \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (s,\ t\in R)$$

이므로 해공간의 기저와 차원은 각각 다음과 같다.

$$S=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\ \text{nullity}(A) = 2$$ ■

예제 2 다음 동차연립방정식의 해공간의 기저와 차원을 구하여라.

$$\begin{aligned} 4x_1+12x_2-7x_3+6x_4&=0\\ x_1+\ 3x_2-2x_3+\ x_4&=0\\ 3x_1+9x_2-2x_3+11x_4&=0\end{aligned}$$

풀이

Sage를 이용하여 연립방정식의 계수행렬 A의 RREF를 구하면

```
A=matrix(ZZ, 3, 4, [4, 12, -7, 6, 1, 3, -2, 1, 3, 9, -2, 11])
print A.echelon_form()
```

```
[1 3 0 5]
[0 0 1 2]
[0 0 0 0]
```

이므로 이 연립방정식은 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2-5x_4\\ x_3 &= \qquad\quad -2x_4\end{aligned}$$

x_2와 x_4가 자유변수이므로, $2(=4-2)$개의 임의의 실수 r, s에 대하여 $x_2=r$, $x_4=s$라 하면 이 방정식의 일반해는

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3r-5s\\r\\-2s\\s\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-5\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

이므로 해공간의 기저 S와 차원은 각각 다음과 같다.

$S=\{(-3,1,0,0),\ (-5,0,-2,1)\}$, 해공간의 차원 = nullity($A$)= 2 □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

① 해공간의 기저 구하기

```
A=matrix(ZZ, 3, 4, [4, 12, -7, 6, 1, 3, -2, 1, 3, 9, -2, 11])
A.right_kernel()
```

```
Free module of degree 4 and rank 2 over Integer Ring
Echelon basis matrix:
[ 1  3  4 -2]
[ 0  5  6 -3]
```

② 해공간의 차원 구하기

```
A.right_nullity()
```

```
2
```

■

행공간과 열공간

정의

행렬 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 에 대하여 A 의 각 행으로 이루어진 m 개의 벡터

$$A_{(1)}=[a_{11}\ \ a_{12}\ \ \cdots\ \ a_{1n}],\ A_{(2)}=[a_{21}\ \ a_{22}\ \ \cdots\ \ a_{2n}],$$
$$\ldots\ ,\ A_{(m)}=[a_{m1}\ \ a_{m2}\ \ \cdots\ \ a_{mn}]$$

과 A 의 각 열로 이루어진 n 개의 벡터

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ A^{(2)}=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ \ldots\ ,\ A^{(n)}=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

을 각각 A 의 행벡터(row vector), 열벡터(column vector)라고 한다. 이 행벡터

$A_{(1)}, \ldots, A_{(m)}$ 들에 의해서 생성된 R^n 의 부분공간 즉,

$$< A_{(1)}, \ldots, A_{(m)} >$$

을 A 의 행공간(row space), Row(A) 로 나타내고, 열벡터 $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ 에 의해 생성된 R^m 의 부분공간 즉,

$$< A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} >$$

을 A 의 열공간(column space)이라 하고, Col(A) 로 나타낸다. 그리고 행공간의 차원을 A 의 행계수(row rank), 열공간의 차원을 A 의 열계수(column rank)라 하고, 각각 $r(A)$, $c(A)$ 로 나타낸다. 즉,

$$\dim \text{Row}(A) = r(A), \quad \dim \text{Col}(A) = c(A)$$

정리 7.2.1

두 행렬 A, B가 행동치이면 이들은 같은 행공간을 갖는다.

증명 http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap7/Page16.htm

- 따라서 행렬 A 의 RREF에 나타나는 영이 아닌 행벡터들은 A 의 행공간의 기저를 이룬다. 이 정리는 열에 대해서도 성립한다.

예제 3

집합 S가 다음과 같을 때, R^5 의 부분공간 $W = < S >$ 의 기저를 찾아라.

$$S = (1, 2, 1, 3, 2), \ (3, 4, 9, 0, 7), \ (2, 3, 5, 1, 8), \ (2, 2, 8, -3, 5)$$

풀이

W 는 S에 있는 벡터들을 행으로 갖는 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

의 행공간 Row(A)과 같으므로 **정리** 7.2.1에 의해 A의 RREF

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & -39 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

의 행공간과 같다. 따라서 B의 영 아닌 행벡터들의 집합

$$\{(1, 0, 7, 0, -39), \ (0, 1, -3, 0, 31), \ (0, 0, 0, 1, -7)\}$$

은 $W = \mathrm{Row}(A)$의 기저이다. ■



다음 행렬 A의 열공간의 기저를 찾아라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

풀이

A 의 열공간은 $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ 의 행공간과 같으므로 **정리** 7.2.1에 의해 A^T 의 RREF

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 의 행공간과 같다.

따라서 $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$은 A의 열공간의 한 기저이다. ■

정리 7.2.2

임의의 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$에 대하여 A의 행계수와 열계수는 같다.

- 이 계수를 행렬 A의 **계수(rank)**라 하고 아래와 같이 쓴다.

$$r(A)=c(A)=\text{rank}(A)$$

참고 주어진 행렬의 기본 공간들 사이의 관계

- $\text{Row}(A^T)=\text{Col}(A)$, $\text{Col}(A^T)=\text{Row}(A)$,
- $\text{Row}(A)^{\perp}=\text{Null}(A)$, $\text{Null}(A)^{\perp}=\text{Row}(A)$,
- $\text{Col}(A)^{\perp}=\text{Null}(A^T)$, $\text{Null}(A^T)^{\perp}=\text{Col}(A)$

예제 5 $\mathbf{a}\,(\neq 0)\in R^n$에 대하여 $\mathbf{a}^{\perp}=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n \mid a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\}$이므로 $\mathbf{a}^{\perp}$은 R^n의 hyperplane이다. ■



[수학자 접시]

7.3 차원정리(Rank-Nullity 정리)

● 참고 동영상: http://youtu.be/bM-Pze0suqo http://youtu.be/f3P4gfDVd8M
● 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-9-sec-7-3.html



우리는 행렬 A의 영공간, 행공간, 열공간 등에 대하여 알아보았다. 이 공간들의 차원과 행렬 A의 크기와의 관계에 대하여 알아본다.

계수(Rank)

정의 [계수(rank)]

행렬 A의 행공간이나 열공간의 차원을 간단히 A의 **계수(rank)**라 하고, $\text{rank}(A)$로 나타낸다.

● $A \to U = \text{RREF}(A)$이라 하면 U는 아래의 모양이 된다. 따라서 $\text{rank}(A) = r$이고, $\text{nullity}(A) = n - r$이다.

$$U = \overbrace{\left[\begin{array}{c:c} I_r & * \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right]}^{n} \Big\} m$$

정리 7.3.1 [행렬의 차원정리, Rank-Nullity 정리]

임의의 행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$$

● Rank-Nullity 정리는 다음과 같이 선형변환의 형태로 쓸 수 있다. 선형변환 $T: R^n \to R^m$의 표준행렬이 $A \in M_{m \times n}$이라면

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rank}(A), \quad \dim(\ker(T)) = \mathrm{nullity}(A)$$

이므로

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(R^n) = n$$

예제 1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{bmatrix}$의 RREF는 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & -39 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$이므로 rank($A$)= 3이고 $n = 5$ 이다. 따라서 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$의 해공간의 차원은 nullity(A)= $5 - 3 = 2$이다. ■

예제 2 다음의 주어진 행렬 A의 rank와 nullity를 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$



행렬 A의 RREF는

```
A = matrix(ZZ, 4, 5, [1, -2, 1, 1, 2, -1, 3, 0, 2, -1, 0, 1, 1, 3, 4, 1, 2, 5, 13, 5])
A.echelon_form()
```

```
[1 0 3 7 0]
[0 1 1 3 0]
[0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0]
```

이므로 rank(A)= 3이고 **정리 7.3.1**에 의해 $\mathrm{nullity}(A) = 5 - \mathrm{rank}(A) = 5 - 3 = 2$이다. ■



- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/7-B2-rank-nullity.html

Sage풀이 http://sage.skku.edu

```
print A.rank()                    # rank 계산
print A.right_nullity()           # nullity 계산
```

```
3
2
```
■

정리 7.3.2

연립방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$가 해를 가질 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}[A \ \vdots \ \mathrm{b}]$$

증명 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathrm{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$라 하면 연립방정식 $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$는

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1}$$

과 동치이므로 다음이 성립한다.

$A\mathrm{x} = \mathrm{b}$가 해를 갖는다. $\Leftrightarrow$ 방정식 (1)을 만족하는 $x_1, x_2, \ldots, x_n$이 존재한다.

$\Leftrightarrow$ b는 A의 열벡터들의 일차결합이다.

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{b} \in \mathrm{Col}(A)$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}[A \ \vdots \ \mathrm{b}]$ ■

예제 3

연립방정식 $\begin{matrix} x-2y+2z=1 \\ x+4y+3z=2 \\ 2x+2y+5z=3 \end{matrix}$ 은 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 으로 나타낼 수 있고,

```
A = matrix(ZZ, 3, 3, [1, -2, 2, 1, 4, 3, 2, 2, 5])
  b = vector([1, 2, 3])
print A.rank()                    # rank(A)
print A.augment(b).rank()            # rank[A : b]
```

```
2
2
```

에서 $\text{rank}(A)=2=\text{rank}[A\ \vdots\ \mathbf{b}]$ 이므로 **정리** 7.3.2에 의하여 해가 존재함이 확인된다. ■



정의 [hyperplane]

$\mathbf{a}\in R^n$의 영 아닌 벡터라 하자.

$\mathbf{a}^{\perp}=\{\mathbf{x}\in R^n \mid \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=0\}$을 $\mathbf{a}$의 hyperplane이라 한다.

(이는 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{a}=0$의 해공간으로도 이해할 수 있다.)

- $\dim \mathbf{a}^{\perp}=\text{nullity}(\mathbf{a}^T)=n-1$이다.



정리 7.3.3

W를 R^n의 $n-1$차원 부분공간이라 하면, $W=\mathbf{a}^{\perp}$인 영 아닌 벡터 $\mathbf{a}\in R^n$이 존재한다.

증명 $\dim W=n-1$이므로 차원정리에 의해 $\dim W^{\perp}=1$이어야 한다. 그러므로

$W^{\perp}=\text{span}\{\mathbf{a}\}$인 영아닌 벡터 $\mathbf{a}$가 존재한다.

즉, $W=(W^{\perp})^{\perp}=(\text{span}\{\mathbf{a}\})^{\perp}=\mathbf{a}^{\perp}$ ■

7.4 Rank 정리

- 참고 동영상: http://youtu.be/8P7cd-Eh328 http://youtu.be/bM-Pze0suqo
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-9-sec-7-4.html



모든 행렬 A의 행계수와 열계수는 언제나 같으므로 7.3절에서 이를 행렬 A의 계수(rank)로 정의하였다. 이제 계수와 부분공간의 차원 사이의 관계를 알아보자.

정리 7.4.1 [차원의 기본정리]

임의의 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$에 대하여 dim Row(A)=dim Col(A)이다.

증명 http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap7/Page26.htm
http://matrix.skku.ac.kr/nla/rank-review/Reciew-rank.htm ■

정리 7.4.2

임의의 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$에 대하여 rank(A) $\le$ min $\{m, n\}$

증명 dim Row(A) $\le m$, dim Col(A) $\le n$이고 rank(A)=dim Row(A)=dim Col(A)이므로 rank(A) $\le$ min $\{m, n\}$ ■

정리 7.4.3 [Rank 정리]

임의의 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) dim Row(A)+dim Null(A)= A의 열의 개수(즉 rank(A)+nullity(A)=n)
(2) dim Col(A)+dim Null(A^T)= A의 행의 개수(즉 rank(A)+nullity(A^T)=m)

증명 (1)은 **정리 7.3.1**의 행렬의 차원정리에 의해 바로 유도되며,
(2)는 Row(A^T)=Col(A)이고 rank(A)=rank(A^T)이므로 (1)번 식에서 A 대신 A^T를 대입하면 얻어진다. ■

정리 7.4.4

행렬 A가 크기 n인 정사각행렬일 때, A가 가역행렬일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\text{rank}(A)=n$$

증명 행렬 A가 가역행렬이면 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$은 자명한 해만을 가지므로, $\text{Null}(A)=\{\mathbf{0}\}$, 즉 $\text{nullity}(A)=0$이므로 행렬의 차원정리에 의하여 $\text{rank}(A)=n$이다. ■

예제 1 다음 행렬의 계수와 nullity를 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ -1 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

풀이

가우스 소거법을 이용하면,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ -1 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+R_3]{(-2)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(1/3)R_2+R_3]{(-1)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3R_3]{(1/3)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)R_2+R_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = U = \text{RREF}(A)$$

이므로 선행성분의 개수$=3=\text{rank}(A)$이고 행렬의 차원정리에 의해 A의 열의 개수가 4이므로 $4-\text{rank}(A)=4-3=1=\text{nullity}(A)$ 즉, $\text{rank}(A)=3$, $\text{nullity}(A)=1$이다. ■

정리 7.4.5

임의의 행렬 A, B에 대하여 다음이 항상 성립한다.

(1) $\text{Null}(B) \subseteq \text{Null}(AB)$
(2) $\text{Null}(A^T) \subseteq \text{Null}((AB)^T)$
(3) $\text{Col}(AB) \subseteq \text{Col}(A)$
(4) $\text{Row}(AB) \subseteq \text{Row}(B)$

증명 (1)번만 증명하기로 한다.

$\mathbf{x} \in \text{Null}(B) \Rightarrow B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\therefore \ \mathbf{x} \in \text{Null}(AB)$ ■

정리 7.4.6

$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \ \text{rank}(B)\}$

정리 7.4.7

임의의 행렬 B에 가역행렬 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$를 곱하면 다음 등식이 성립한다.

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B) = \text{rank}(BA)$$

- 가역행렬을 곱하는 경우에는 rank를 감소시키지 않는다.

정리 7.4.8

임의의 행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$가 $\text{rank}(A) = r$이라 하자.

(1) A의 모든 부분행렬 C는 $\text{rank}(C) \leq r$을 만족한다.
(2) A는 계수(rank)를 r로 가지는 부분행렬을 하나 이상 가진다.

증명 (1) 임의의 부분행렬 C에 대하여 $\text{Row}(C) \subseteq \text{Row}(A)$이므로

$$\text{rank}(C) = \dim\text{Row}(C) \leq \dim\text{Row}(A) = \text{rank}(A) = r$$

(2) r개의 일차독립인 행들이 있고, (즉, $\text{Row}(A)$의 기저) r개의 일차독립인 열들을 A에서 뽑아보자(즉, $\text{Col}(A)$의 기저). 이것들로부터 대응하는 $r \times r$ 크기의 부분행렬을 찾으면 이것이 rank가 r인 부분행렬이 된다. ■

가역행렬의 동치정리

정리 7.4.9 [가역행렬의 동치정리]

행렬 A가 n차 정사각행렬일 때 다음은 동치이다.

(1) A는 가역이다.

(2) $\det(A) \neq 0$

(3) A는 I_n과 행동치이다.

(4) A는 기본행렬의 곱으로 표현된다.

*(5) A의 (유일한) LDU-분해(factorization)가 존재한다. 즉 치환행렬 P가 존재하여 $PA = LDU$가 성립한다(여기서 L은 주대각선성분이 1인 하삼각행렬, D는 주대각선성분이 모두 0이 아닌 대각선행렬, U는 주대각선성분이 1인 상삼각행렬).

(6) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 모든 $n \times 1$ 벡터 $\mathbf{b}$에 대하여 유일한 해를 갖는다.

(7) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 자명한 해 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$만을 갖는다.

(8) A의 열벡터들이 일차독립이다.

(9) A의 열벡터들이 R^n을 생성한다.

*(10) A는 left inverse를 갖는다. 즉 적당한 행렬 X가 존재하여 $XA = I$이다.

(11) $\text{rank}(A) = n$이다.

(12) A의 행벡터들이 일차독립이다.

(13) A의 행벡터들이 R^n을 생성한다.

*(14) A는 right inverse를 갖는다. 즉 적당한 행렬 X가 존재하여 $AX = I$이다.

(15) T_A는 단사이다.

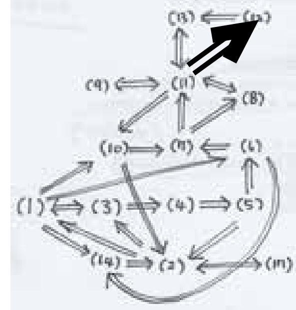
(16) T_A는 전사이다.

(17) $\lambda = 0$은 A의 고유값이 아니다.

(18) $\text{nullity}(A) = 0$이다.

증명 다음 그림에 제시된 동치 사이클 중 일부만 증명한다.

① (10) ⇒ (7) ⇒ (8) ⇒ (11) ⇒ (10)



(10) ⇒ (7): A는 left inverse, 즉 적당한 행렬 X가 존재하여 $XA = I$가 성립한다고 가정하자. 그리고 x를 Ax =0의 해라고 하자. $XA = I$이므로

$$\mathrm{x} = I\mathrm{x} = (XA)\mathrm{x} = X(A\mathrm{x}) = X0 = 0$$

이 성립한다. 따라서 $A\mathrm{x} = 0$는 자명한 해 $\mathrm{x} = 0$만을 갖는다.

(7) ⇒ (8): $A\mathrm{x} = 0$은 자명한 해 $\mathrm{x} = 0$만을 갖는다고 가정하자. A의 k번째 열벡터를 v_k, $\mathrm{x} = [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]^T$라 하면

$$\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \alpha_2 \mathrm{v}_2 + \cdots\ \alpha_n \mathrm{v}_n = 0 \Leftrightarrow A\mathrm{x} = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0\ \ 1 \le i \le n$$

이므로 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots, \mathrm{v}_n\}$, 즉 A의 열벡터들은 일차독립이다.

(8) ⇒ (11): A의 열벡터들이 일차독립이라고 가정하자. 그러면 $\mathrm{rank}(A)$는 일차독립인 A의 열벡터들의 최대개수이므로 $\mathrm{rank}(A) = n$이다.

(11) ⇒ (10): $\mathrm{rank}(A) = n$이라고 가정하자. 그러면 (행계수와 열계수가 같으므로) 행벡터들이 일차독립이고, e_k를 k번째 원소가 1이고 그 밖의 원소는 0인 n차원 벡터라고 하면 다음과 같은 선형연립방정식

$$A^T\mathrm{x} = \mathrm{e}_k,\quad 1 \le k \le n$$

은 $\mathrm{rank}(A^T) = n = \mathrm{rank}[A^T : \mathrm{e}_k]$이므로 모든 k에 대하여 consistent가 된다. x_k를 이 방정식의 해라 하면 $X = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1^T \\ \mathrm{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n^T \end{bmatrix}$는 A의 left inverse가 된다.

② (1) ⇒ (6) ⇒ (14) ⇒ (2) ⇒ (1)

(1) ⇒ (6): A는 가역이라 가정하면 역행렬 A^{-1}가 존재한다. 그리고 $n \times 1$ 벡터 b에 대하여

$$A(A^{-1}\mathrm{b}) = (AA^{-1})\mathrm{b} = I\mathrm{b} = \mathrm{b}$$

성립하므로 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$는 해 $\mathrm{x}_0=A^{-1}\mathrm{b}$를 갖는다. 또한 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$의 임의의 해를 x라 하면

$$\mathrm{x}=I\mathrm{x}=(A^{-1}A)\mathrm{x}=A^{-1}(A\mathrm{x})=A^{-1}\mathrm{b}=\mathrm{x}_0$$

이므로 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$는 유일한 해를 갖는다.

(6) $\Rightarrow$ (14): $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$는 모든 $n\times 1$ 벡터 b에 대하여 유일한 해를 갖는다고 가정하자. e_k를 k번째 원소가 1이고 그 밖의 원소는 0인 n차원 벡터라고 하면 다음과 같은 선형연립방정식

$$A\mathrm{x}=\mathrm{e}_k,\quad 1\le k\le n$$

은 가정에 의해 역시 해를 갖는다. x_k를 이 방정식의 해라 하면 $X=[\mathrm{x}_1\ \mathrm{x}_2\ \cdots\ \mathrm{x}_n]$는 A의 right inverse가 된다.

(14) $\Rightarrow$ (2): A는 right inverse, 즉 적당한 행렬 X가 존재하여 $AX=I$가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\det(A)\det(X)=\det(AX)=\det(I)=1$$

에서 $\det(A)\neq 0$이다.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\det(A)\neq 0$이라고 가정하자. 그러면 행렬 $B=\dfrac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$가 존재하여 다음이 성립한다.

$$AB=BA=I$$

따라서 A는 가역이다. ■

수학의 **본질은**
자유로움에 있다
칸토어 1845–1918

집합론의 창시자
이후 집합론은 거의 모든 수학에 스며들었다



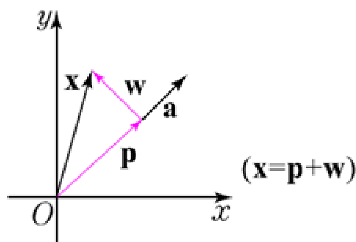
7.5 정사영(Projection) 정리

- 참고 동영상: http://youtu.be/Rv1rd3u-oYg
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-10-sec-7-5.html



1장에서는 눈으로 확인이 가능한 벡터공간 R^3에서의 정사영(projection)을 정의하였다. 이제 정사영의 개념을 R^n으로 확장하고 선형변환으로서의 정사영에 대응하는 표준행렬을 생각한다. 이는 Gram-Schmidt 정규직교화 과정과 QR-분해의 이론적 기초가 된다.

R^2상의 정사영



$$\mathbf{p} = t\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$$

R^n상의 (일차원 부분공간으로의) 정사영

 7.5.1 [정사영]

R^n상의 영 아닌 벡터 $\mathbf{a}$에 대하여, 모든 $\mathbf{x} \in R^n$는 다음과 같이 유일하게 표현 가능하다.

$$\mathbf{x} = \text{proj}_{<\mathbf{a}>}\mathbf{x} + \mathbf{w} = t\mathbf{a} + \mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{w}$$

여기에서 $\mathbf{p}$는 벡터 $\mathbf{a}$의 상수배이고 $\mathbf{w}$는 $\mathbf{a}$에 수직인 벡터이다. 또한 위의 벡터 $\mathbf{p}$, $\mathbf{w}$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{p} = t\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$$

- 위의 정리에서 p 벡터를 x의 span{a}상의 정사영(또는 직교사영, orthogonal projection)이라 하며 $\text{proj}_{<a>}x = \frac{x \cdot a}{\|a\|^2}a$로 표기하고 w를 직교성분(orthogonal component)이라 한다.

 [R^n상의 정사영(orthogonal projection)]

선형변환(연산자) $T : R^n \to R^n$을 다음과 같이 정의하자.

$$T(x) = \text{proj}_{<a>}x = \frac{x \cdot a}{\|a\|^2}a$$

이것을 벡터 x의 a에 의해 생성되는 부분공간 위로의 정사영(orthogonal projection of R^n onto span{a})이라 한다.

- $T(x) = \text{proj}_{<a>}x$는 선형변환이 됨을 쉽게 확인할 수 있다.
  (http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap7/Page33.htm)

 7.5.2

a를 R^n상의 0 아닌 열벡터라고 하자. 그러면 선형변환

$$T(x) = \text{proj}_{<a>}x = Px$$

의 표준행렬은 다음과 같다.

$$P = \frac{1}{a^T a}aa^T \text{(이때, } P\text{는 대칭행렬이며 rank}(P) = 1\text{이다.)}$$

예제 1 위의 정리를 이용하여 R^2상에서 주어진 점을 원점을 지나는 직선 $y=(\tan\theta)x$ 위로 정사영하는 변환에 대한 표준행렬 P_θ를 구하여라.

풀이

벡터 x의 a에 의해 생성되는 부분공간 위로의 정사영을 구하는 문제이다. 따라서 a를 $y=(\tan\theta)x$ 위에 있는 크기 1인 단위벡터 u로 고르면 된다. 즉,

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} \text{ 이고 } \|\mathbf{u}\|^2 = 1$$

이다. 그러므로 앞의 정리에서

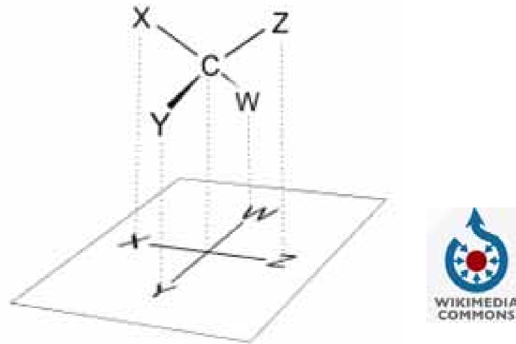
$$P_\theta=\frac{1}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{u}^T=\frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T=\mathbf{u}\mathbf{u}^T=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}[\cos\theta\ \sin\theta]=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$$ ■

예제 2 벡터 a$=(1,\ -4,\ 2)$에 의해 생성되는 R^3의 직선에 대한 정사영 T의 표준행렬 P를 구하여라.

풀이

$$\mathbf{a}^T\mathbf{a}=[1\ -4\ \ 2]\begin{bmatrix}1\\-4\\2\end{bmatrix}=21,\quad \mathbf{a}\mathbf{a}^T=\begin{bmatrix}1\\-4\\2\end{bmatrix}[1\ -4\ 2]=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ -4 & 16 & -8\\ 2 & -8 & 4\end{bmatrix}$$

이므로, $P=\frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T=\frac{1}{21}\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ -4 & 16 & -8\\ 2 & -8 & 4\end{bmatrix}$ ■



http://en.wikipedia.org/wiki/Fischer_projection

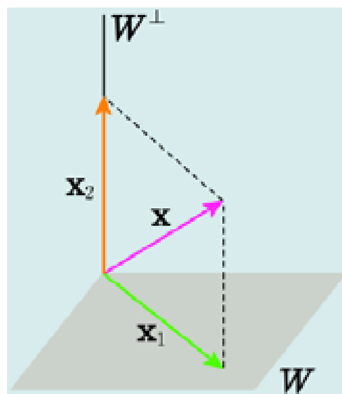
R^n상의 일반적인 부분공간으로의 정사영

정리 7.5.3

W를 R^n의 부분공간이라 하면 R^n의 모든 벡터 x는

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \quad (\mathrm{x}_1 = \mathrm{proj}_W \mathrm{x} \in W,\ \mathrm{x}_2 = \mathrm{x} - \mathrm{x}_1 \in W^{\perp})$$

로 유일하게 표현된다. 여기서 $W^{\perp}$는 W에 수직인 벡터들의 집합이다.



$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{proj}_W \mathrm{x},\ \mathrm{x}_2 = \mathrm{x} - \mathrm{x}_1 = \mathrm{proj}_{W^{\perp}} \mathrm{x}$$

정리 7.5.4

W를 R^n의 부분공간이라 하고, M의 열벡터들이 W의 기저(따라서 일차독립)를 이룰 때 모든 $\mathrm{x} \in R^n$에 대하여

$$\mathrm{proj}_W \mathrm{x} = M(M^T M)^{-1} M^T \mathrm{x}$$

이다.



http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap7/Page35.htm

예제 3 평면 $x-4y+2z=0$상의 정사영의 표준행렬을 구하여라.

풀이

평면 $x-4y+2z=0$의 일반해는

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t_1-2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ (t_1,\ t_2 \in R)\text{이다.}$$

따라서 $M=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이고, 표준행렬은 $P=M(M^TM)^{-1}M^T$이다.

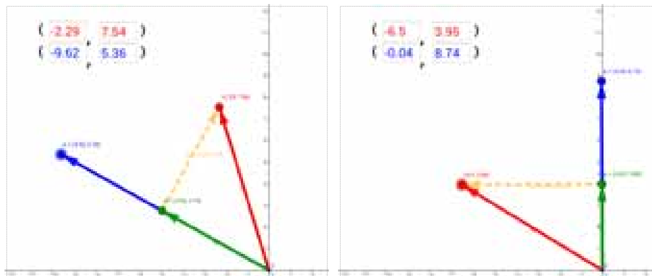
$$M^TM=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}\text{이고 } (M^TM)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix}\text{이므로}$$

$$\therefore \ P=M(M^TM)^{-1}M^T=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix} \ \blacksquare$$

● 정사영(orthogonal projection)의 표준행렬 P는 대칭이고 idempotent($P^2=P$)이다.

참고 두 벡터의 정사영(컴퓨터 시뮬레이션)

- http://www.geogebratube.org/student/m9503



7.6 최소제곱해(least square solution)

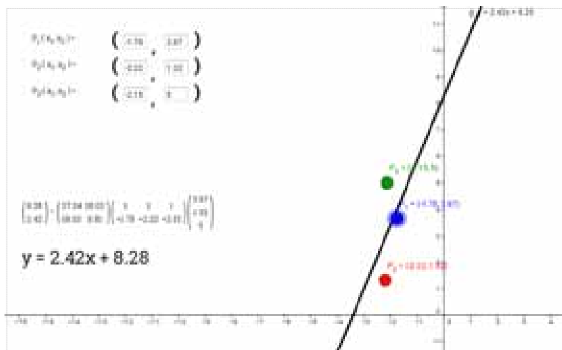
- 참고 동영상: http://www.youtube.com/watch?v=BC9qeR0JWis
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-10-sec-7-6.html



$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$가 해를 갖는 경우 해를 구하는 방법을 앞에서 학습하였다. 여기서는 정사영을 이용하여 해가 존재하지 않는 경우에도 가장 근사한 해를 찾는 방법을 소개한다.

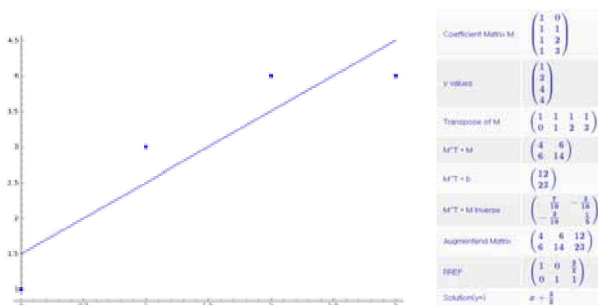
최소제곱직선 with GeoGebra

〈컴퓨터 시뮬레이션〉 http://www.geogebratube.org/student/m12933



최소제곱직선 with Sage

〈컴퓨터 시뮬레이션〉 http://matrix.skku.ac.kr/2012-album/11.html



7.7 Gram-Schmidt의 정규직교화과정

- 참고 동영상: http://youtu.be/EBCi1nR7EuE
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-10-sec-7-7.html



R^n에 대한 모든 기저의 원소 개수는 항상 n개이지만, 기저의 모양은 다양하다. 이 절에서는 R^n의 모든 (nontrivial) 부분공간은 기저를 가진다는 것을 보이고, 이 기저로부터 정규직교기저를 찾는 방법에 대하여 알아본다.

참고

R^n의 부분공간 중 $\{0\}$과 R^n은 자명한(trivial) 부분공간이라 한다.
R^n에 대한 모든 기저의 원소 개수는 항상 n개(따라서 차원이 n)이지만, 기저의 모양은 다양하다.
R^n의 모든 (nontrivial) 부분공간은 **정규직교기저**를 갖는다.

직교집합과 정규직교집합

정의

R^n의 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$에 대하여

$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$

라 하자. 이때, S의 서로 다른 임의의 두 벡터가 모두 직교하면 S를 직교집합(orthogonal set)이라 한다. 특히, 직교집합 S에 속하는 벡터가 모두 크기가 1인 경우 S를 정규직교집합(orthonormal set)이라고 한다.

- 위 정의를 간단히 기호화하여 표현하면 다음과 같음을 알 수 있다.

$$S: \text{직교집합} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$S: \text{정규직교집합} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (= \delta_{ij} \text{ Kronecker의 델타})$$

예제 1 (1) R^3의 표준기저 $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_2\}$는 정규직교집합이다.

(2) R^3에서 $\mathrm{x}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathrm{x}_2 = (2, 0, 1)$, $\mathrm{x}_3 = (1, 0, -2)$라 하면, $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$은 직교집합이지만 정규직교집합은 아니다.

(3) R^3에서 $\mathrm{y}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathrm{y}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathrm{y}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$라 하면 $\{\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_3\}$는 정규직교집합이다. ■

직교성과 일차독립성

정리 7.7.1

R^n의 영 아닌 벡터들의 집합 $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_k\}$가 직교집합이면 S는 일차독립이다.

증명 임의의 $c_1, c_2, \ldots, c_k \in R$에 대하여

$$c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k = \mathbf{0}$$

이라 하면, 각 $i(i = 1, 2, \ldots, k)$에 대하여

$$(c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_k\mathrm{x}_k) \cdot \mathrm{x}_i = \mathbf{0} \cdot \mathrm{x}_i$$

이다. 즉,

$$c_1(\mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_i) + c_2(\mathrm{x}_2 \cdot \mathrm{x}_i) + \cdots + c_k(\mathrm{x}_k \cdot \mathrm{x}_i) = \mathbf{0} \cdot \mathrm{x}_i = 0$$

이때, $i \neq j$이면 $\mathrm{x}_j \cdot \mathrm{x}_i = 0$이므로 위 식으로부터 다음을 얻는다.

$$c_i(\mathrm{x}_i \cdot \mathrm{x}_i) = c_i\|\mathrm{x}_i\|^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

그런데 $\mathrm{x}_i \neq \mathbf{0}$이므로 $\|\mathrm{x}_i\| > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$이 되어

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

이다. 따라서 S는 일차독립이다. ■

직교기저와 정규직교기저

정의 [정규직교기저]

R^n의 기저 S가 직교집합이면 직교기저(orthogonal basis), 정규직교기저집합이면 정규직교기저(orthonormal basis)라고 한다.

예제 2 예제 1에서 (1)과 (3)에 있는 집합은 R^3의 정규직교기저이고, (2)에 있는 집합은 R^3의 직교기저이다.

정리 7.7.2

집합 $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n\}$이 R^n의 정규직교기저이면 R^n의 임의의

(1) 벡터 x는 다음과 같이 표현된다.

$\mathrm{x} = c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n$

여기서, $c_i = \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$이다.

(2) 만일 S가 R^n의 직교기저이면, $c_i = \dfrac{\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}_i}{\|\mathrm{x}_i\|^2}$ 이 된다.

증명 (1)번만 증명하기로 한다. S가 R^n의 기저이므로 임의의 $\mathrm{x} \in R^n$는

$$\mathrm{x} = c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n, \quad (c_i \in R)$$

로 표현되고, 각 $i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}_i &= (c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n) \cdot \mathrm{x}_i \\ &= c_1(\mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_i) + c_2(\mathrm{x}_2 \cdot \mathrm{x}_i) + \cdots + c_n(\mathrm{x}_n \cdot \mathrm{x}_i)\end{aligned}$$
이다.

그런데 S가 정규직교기저이므로 $\mathrm{x}_i \cdot \mathrm{x}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ 이다.

따라서 $c_i = \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ ■



예제 3 $\mathrm{y} = (2, -3, 5)$를 예제 1의 (3)에 있는 R^3의 정규직교기저

$$\left\{ \mathrm{y}_1 = (0, 1, 0),\ \mathrm{y}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ \mathrm{y}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\}$$

의 일차결합으로 표시하여라.

풀이

$\mathrm{y} = c_1\mathrm{y}_1 + c_2\mathrm{y}_2 + c_3\mathrm{y}_3$라 하면 **정리** 7.7.2에 의하여 $c_i = \mathrm{y} \cdot \mathrm{y}_i \quad (i = 1, 2, 3)$

이므로 $c_1 = \mathrm{y} \cdot \mathrm{y}_1 = -3,\ c_2 = \mathrm{y} \cdot \mathrm{y}_2 = \dfrac{9}{\sqrt{5}},\ c_3 = \mathrm{y} \cdot \mathrm{y}_3 = -\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

$$\therefore\ \mathrm{y} = c_1\mathrm{y}_1 + c_2\mathrm{y}_2 + c_3\mathrm{y}_3 = -3\mathrm{y}_1 + \frac{9}{\sqrt{5}}\mathrm{y}_2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\mathrm{y}_3$$ ■

참고

(1) 만일 $S' = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n\}$을 R^n의 정규직교기저라면 $\|\mathrm{x}_i\| = 1$이므로 $\mathrm{y} \in R^n$의 $W_k = < \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_k >$로의 정사영은 다음과 같다.

$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{proj}_{W_k}\mathrm{y} = (\mathrm{y} \cdot \mathrm{x}_1)\mathrm{x}_1 + (\mathrm{y} \cdot \mathrm{x}_2)\mathrm{x}_2 + \cdots + (\mathrm{y} \cdot \mathrm{x}_k)\mathrm{x}_k$$

(2) 만일 집합 $S' = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n\}$이 R^n의 (정규직교기저가 아니라, 단지) 직교기저라면 $\mathrm{y}_1 = \mathrm{proj}_{W_k}\mathrm{y}$ 의 모양은 아래와 같아진다.

$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{proj}_{W_k}\mathrm{y} = \frac{\mathrm{y} \cdot \mathrm{x}_1}{\|\mathrm{x}_1\|^2}\mathrm{x}_1 + \frac{\mathrm{y} \cdot \mathrm{x}_2}{\|\mathrm{x}_2\|^2}\mathrm{x}_2 + \cdots + \frac{\mathrm{y} \cdot \mathrm{x}_k}{\|\mathrm{x}_k\|^2}\mathrm{x}_k$$

예제 4 R^3의 두 벡터 $\mathrm{x}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathrm{x}_2 = \left(\frac{5}{13}, 0, -\frac{12}{13}\right)$로 이루어진 정규직교집합 $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\}$에 의하여 생성되는 부분공간을 W라 하자. 벡터 $\mathrm{y} = (2, 1, 1)$의 W 위로의 직교정사영과 W에 관한 y의 직교성분을 구하여라.

풀이

$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{proj}_W\mathrm{y} = (\mathrm{y}\cdot\mathrm{x}_1)\mathrm{x}_1 + (\mathrm{y}\cdot\mathrm{x}_2)\mathrm{x}_2$$
$$= 1\,(0, 1, 0) + \left(-\frac{2}{13}\right)\left(\frac{5}{13}, 0, -\frac{12}{13}\right) = \left(-\frac{10}{169}, 1, \frac{24}{169}\right)$$

또, W에 관한 y의 직교성분은

$$\mathrm{y}_2 = \mathrm{y} - \mathrm{proj}_W\mathrm{y} = (2, 1, 1) - \left(-\frac{10}{169}, 1, \frac{24}{169}\right) = \left(\frac{348}{169}, 0, \frac{145}{169}\right)$$ ■

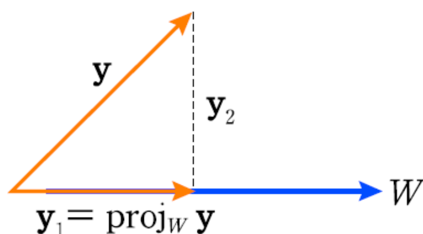
Gram-Schmidt 정규직교화 과정

정리 7.7.3

집합 $S = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n\}$을 R^n의 임의의 기저라 하자. 그러면 S로부터 얻어지는 정규직교기저가 존재한다.

증명 [Gram-Schmidt 정규직교화 과정]

먼저 R^n의 기저 S로부터 직교집합 $T = \{\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n\}$을 다음과 같은 단계로 계산한다.



[단계 1] $\mathrm{y}_1 = \mathrm{x}_1$이라 한다.

[단계 2] y_1에 의하여 생성되는 부분공간을 W_1이라 하고

$$\mathrm{y}_2 = \mathrm{x}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_2 - \frac{\mathrm{x}_2\cdot\mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|^2}\mathrm{y}_1$$

로 한다.

[단계 3] $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$에 의하여 생성되는 부분공간을 W_2라 하고

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \text{proj}_{W_2}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|^2}\mathbf{y}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_2\|^2}\mathbf{y}_2$$
로 한다.

[단계 4] 에서부터 n까지는 마찬가지 방법으로

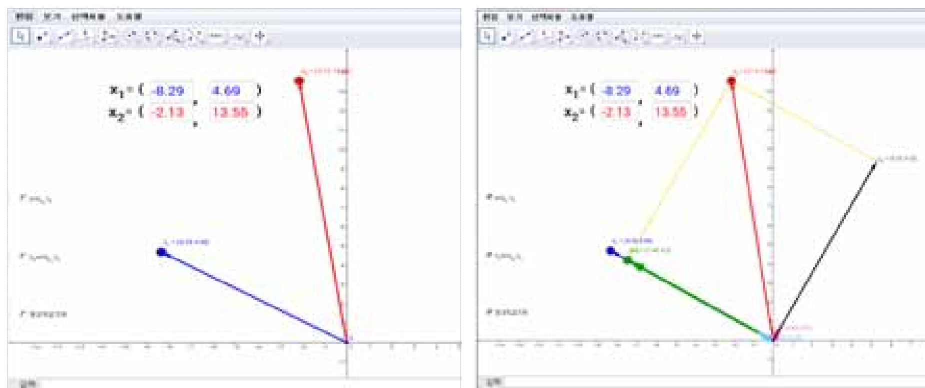
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k - \text{proj}_{W_{k-1}}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|^2}\mathbf{y}_1 - \frac{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_2\|^2}\mathbf{y}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_{k-1}}{\|\mathbf{y}_{k-1}\|^2}\mathbf{y}_{k-1}$$

$(k = 4, 5, \ldots, n)$

위의 단계로부터 얻어지는 $T = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$은 서로 수직인 직교집합이고, 각각의 크기를 1로 하면, 즉 $\mathbf{z}_k = \dfrac{\mathbf{y}_k}{\|\mathbf{y}_k\|}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$라 정의하면 집합 $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n\}$은 R^n의 정규직교기저이다. ■

참고 Gram-Schmidt 정규직교화 과정(컴퓨터 시뮬레이션)

- http://www.geogebratube.org/student/m58812



예제 5 $\mathrm{x}_1 = (1,\ 1)$, $\mathrm{x}_2 = (1,\ 2)$일 때 위의 Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 이용하여 정규직교기저 $Z = \{\mathrm{z}_1,\ \mathrm{z}_2\}$를 구하여라.

풀이

먼저 위의 직교화 과정을 이용하여 먼저 y_1, y_2를 구하면 다음과 같다.

[단계 1] $\mathrm{y}_1 = \mathrm{x}_1 = (1,\ 1)$

[단계 2] $\mathrm{y}_2 = \mathrm{x}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_2 - \dfrac{\mathrm{x}_2 \cdot \mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|^2}\mathrm{y}_1 = (1,\ 2) - \dfrac{3}{2}(1,\ 1) = \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

그러므로 $\mathrm{z}_1 = \dfrac{\mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathrm{z}_2 = \dfrac{\mathrm{y}_2}{\|\mathrm{y}_2\|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ■

예제 6 $\mathrm{x}_1 = (1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{x}_2 = (0,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{x}_3 = (1,\ 2,\ 1)$일 때, Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 이용하여 R^3의 기저 $S = \{\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \mathrm{x}_3\}$로부터 R^3의 정규직교기저 $Z = \{\mathrm{z}_1,\ \mathrm{z}_2,\ \mathrm{z}_3\}$를 구하여라.

풀이

먼저 직교화 과정을 이용하여 y_1, y_2, y_3를 계산하면,

[단계 1] $\mathrm{y}_1 = \mathrm{x}_1 = (1,\ 1,\ 0)$

[단계 2]

$$\mathrm{y}_2 = \mathrm{x}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_2 - \frac{\mathrm{x}_2 \cdot \mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|^2}\mathrm{y}_1 = (0,\ 1,\ 2) - \frac{1}{2}(1,\ 1,\ 0) = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2\right)$$

[단계 3] $\mathrm{y}_3 = \mathrm{x}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_3 - \dfrac{\mathrm{x}_3 \cdot \mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|^2}\mathrm{y}_1 - \dfrac{\mathrm{x}_3 \cdot \mathrm{y}_2}{\|\mathrm{y}_2\|^2}\mathrm{y}_2$

$$= (1,\ 2,\ 1) - \frac{3}{2}(1,\ 1,\ 0) - \frac{5}{9}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2\right) = \left(-\frac{2}{9},\ \frac{2}{9},\ -\frac{1}{9}\right)$$

그러므로 y_1, y_2, y_3를 각각 정규화하면,

$$\mathrm{z}_1 = \frac{\mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

$$\mathrm{z}_2 = \frac{\mathrm{y}_2}{\|\mathrm{y}_2\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6},\ \frac{\sqrt{2}}{6},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\mathrm{z}_3 = \frac{\mathrm{y}_3}{\|\mathrm{y}_3\|} = \left(-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

그러므로 $Z=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

① 직교기저 찾기

```
x1=vector([1,1,0])
x2=vector([0,1,2])
x3=vector([1,2,1])
A=matrix([x1,x2,x3])          # x1, x2, x3를 행벡터로 하는 행렬 생성
[G,mu]=A.gram_schmidt()  # 행에 대하여 직교기저를 찾아준다. A==mu*G
print G
```

```
[   1    1    0]
[-1/2  1/2    2]
[-2/9  2/9 -1/9]
```

② 정규직교기저 찾기(직교기저를 정규화)

```
B=matrix([G.row(i) / G.row(i).norm() for i in range(0, 3)]); B
# 정규화한 직교기저를 행으로 하는 행렬
```

```
[   1/2*sqrt(2)     1/2*sqrt(2)               0]
[-1/3*sqrt(1/2)  1/3*sqrt(1/2)  4/3*sqrt(1/2)]
[          -2/3             2/3           -1/3]
```

따라서 정규직교기저는

$$Z=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$$ 이다.

실제로 다음과 같이 Z의 벡터들을 행으로 이루어진 행렬이 직교행렬인지 확인해볼 수 있다.

③ 직교행렬임을 확인

```
print B*B.transpose()      # 직교행렬인지 확인
print
print B.transpose()*B
```

```
[1 0 0]        [1 0 0]
[0 1 0]        [0 1 0]
[0 0 1]        [0 0 1]
```
■

예제 7

$\mathrm{x}_1=(1,\ 1,\ 2)$, $\mathrm{x}_2=(0,\ 2,\ -4)$일 때, Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 이용하여 집합 $S=\{\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2\}$를 기저로 갖는 R^3의 부분공간 W의 정규직교기저 $Z=\{\mathrm{z}_1,\ \mathrm{z}_2\}$를 구하여라.

풀이

$\mathrm{y}_1=\mathrm{x}_1=(1,\ 1,\ 2)$

$$\mathrm{y}_2=\mathrm{x}_2-\mathrm{proj}_{W_1}\mathrm{x}_2=\mathrm{x}_2-\frac{\mathrm{x}_2\cdot\mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|^2}\mathrm{y}_1=(0,\ 2,\ -4)+\frac{6}{6}(1,\ 1,\ 2)=(1,\ 3,\ -2)$$

$$\therefore\ \mathrm{z}_1=\frac{\mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right),\quad \mathrm{z}_2=\frac{\mathrm{y}_2}{\|\mathrm{y}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$ ■

그 학생은, 수학을 하기에는 **상상력**이 충분하지 않았지..

힐베르트 1862–1943



힐베르트의 23가지 문제

20세기 수학 연구가 나아갈 방향을 제시하였다

7.8 QR-분해; Householder transformations

- 참고 동영상: http://www.youtube.com/watch?v=crMXPi2lgGs
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-10-sec-7-8.html



$m \times k$ 행렬 A가 k개의 일차독립인 열들을 가지면, 여기에 Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 적용하여 얻은 정규직교벡터들을 열로 하는 행렬 Q를 만들어 행렬 $A = QR$(여기서 R은 상삼각행렬)로 분해가 된다. QR-분해는 수치적으로 선형연립방정식, 최소제곱 문제를 풀거나 고유값 및 고유벡터를 구하는데 널리 이용된다. 이 절에서는 QR-분해를 간단히 소개한다.

참고

- http://matrix.skku.ac.kr/sglee/03-Note/QR-Decomp.htm



행렬 분해(Decomposition) - QR 분해

성균관대학교 행렬이론 연구실

Made by Sang-Gu Lee with MyungGuk Baik

2. QR분해

정의 2.1 다음과 같은 형태의 행렬을 *Householder* 행렬이라 한다.

$$H = I - \frac{2uu^T}{u^Tu} \quad (\text{벡터 } u\text{는 0벡터가 아님})$$

7.9 좌표벡터

- 참고 동영상: http://youtu.be/tdd7gbtCCRg
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-10-sec-7-9.html



유한차원 벡터공간에서 기저의 개념은 좌표계의 개념과 밀접한 관계가 있다. 지금까지는 R^n에서 표준기저에 대한 좌표벡터만 다루어왔다. 이 절에서는 표준기저가 아닌 다른 기저에 대한 (주어진) 벡터의 좌표벡터 표현을 소개한다. 이어서 이 두 표현 사이를 연결시켜주는 행렬을 알아본다.

집합 $\alpha = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n\}$이 R^n의 기저이면 R^n에 속하는 모든 벡터 x는 이 기저에 관하여 다음과 같이 유일하게 표현되는데, 이때 $c_1, c_2, \dots, c_n$를 벡터 x의 좌표로 이해할 수 있다.

$$\mathrm{x} = c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n, \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \in R) \tag{1}$$

정의 [좌표벡터]

식 (1)의 스칼라 $c_1, c_2, \dots, c_n$을 순서기저(ordered basis) α에 관한 벡터 x의 좌표(coordinates)라 한다. 또한 R^n의 벡터

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

을 순서기저 α에 관한 x의 좌표벡터(coordinate vector)라 하며, $[\mathrm{x}]_\alpha$로 나타낸다.

예제 1 R^3의 벡터 x$=(2, -3, 5)$는 R^3의 표준기저 $\alpha = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$에 대하여

$$\mathrm{x} = (2, -3, 5) = 2\mathrm{e}_1 + (-3)\mathrm{e}_2 + 5\mathrm{e}_3$$

이므로 $[\mathrm{x}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$이다. ■

예제 2

$\mathrm{x}_1 = (1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{x}_2 = (1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{x}_3 = (0,\ 1,\ -1)$일 때, R^3의 기저 $\alpha = \{\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2,\ \mathrm{x}_3\}$에 관한 $\mathrm{x} = (1,\ 2,\ 3)$의 좌표벡터 $[\mathrm{x}]_\alpha$를 구하여라.



$$\begin{aligned}\mathrm{x} = (1, 2, 3) &= c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + c_3\mathrm{x}_3, \quad (c_i \in R)\\ &= c_1(1,\ 1,\ 0) + c_2(1,\ 1,\ 1) + c_3(0,\ 1,\ -1)\end{aligned}$$

이므로 $\begin{cases} c_1 + c_2 \qquad = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ \qquad c_2 - c_3 = 3 \end{cases}$ 이다.

이 연립방정식을 풀면 $c_1 = -3$, $c_2 = 4$, $c_3 = 1$

$$\therefore\ [\mathrm{x}]_\alpha = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ■

- **벡터를 그 기저에 대한 좌표벡터로 표현하는 것은 결국 연립방정식을 푸는 문제이다.**

정리 7.9.1

집합 α가 벡터공간 R^n의 기저일 때, R^n의 벡터 x, y와 스칼라 $c \in R$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $[\mathrm{x} + \mathrm{y}]_\alpha = [\mathrm{x}]_\alpha + [\mathrm{y}]_\alpha$

(2) $[c\mathrm{x}]_\alpha = c\,[\mathrm{x}]_\alpha$

- 일반적으로 다음이 성립한다.

$[c_1\mathrm{y}_1 + c_2\mathrm{y}_2 + \cdots + c_n\mathrm{y}_n]_\alpha = c_1[\mathrm{y}_1]_\alpha + c_2[\mathrm{y}_2]_\alpha + \cdots + c_n[\mathrm{y}_n]_\alpha$

기저변환문제

두 집합 $\alpha = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$과 $\beta = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$을 n차원 벡터공간 R^n의 서로 다른 순서 기저라 하자. 이때 α와 β에 관한 $x \in R^n$의 두 좌표벡터 $[x]_\alpha$와 $[x]_\beta$ 사이의 관계를 생각해보자.

- $x = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$, $(c_i \in R)$ 이라 하면, β에 관한 $x \in R^n$의 좌표벡터는

$$[x]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

이고, 또한 α에 관한 $x \in R^n$의 좌표벡터 $[x]_\alpha$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[x]_\alpha = [c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n]_\alpha = c_1 [y_1]_\alpha + c_2 [y_2]_\alpha + \cdots + c_n [y_n]_\alpha$$

여기서, α에 관한 y_j의 좌표벡터를 $[y_j]_\alpha = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix}$라 하고, 행렬 P를

$$P = [[y_1]_\alpha : [y_2]_\alpha : \cdots : [y_n]_\alpha] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

라 하면 다음이 성립한다.

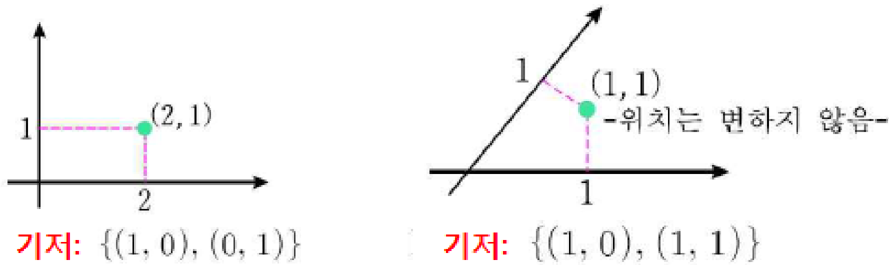
$$[x]_\alpha = c_1 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P[x]_\beta$$

즉, $[x]_\alpha = P\,[x]_\beta$ (2)

- 위의 식 (2)에서 행렬 P는 좌표벡터 $[x]_\beta$를 좌표벡터 $[x]_\alpha$로 변환시키는 역할을 한다. 이때, 행렬 $P = [[y_1]_\alpha [y_2]_\alpha \cdots [y_n]_\alpha]$를 순서기저 β에서 α로의 전이행렬(transition matrix)이라 하고 $P = [I]_\beta^\alpha$로 쓰기로 한다. 즉, $[x]_\alpha = P[x]_\beta = [I]_\beta^\alpha [x]_\beta$이다.

- 이것을 기저변환(Change of Basis)이라 하고, 다른 기저를 사용하면 주어진 벡터의 물리적 위치는 그대로 유지되지만, 대응하는 좌표가 달라진다. 이는 아래 그림과 같이 이해할 수 있다.



예제 3

집합 $\alpha = \{e_1, e_2\}$가 R^2의 표준기저이고 $y_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $y_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$일 때, 두 기저 α, $\beta = \{y_1, y_2\}$에 관하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 기저 β에서 기저 α로의 전이행렬 $P = [I]_\beta^\alpha$를 구하여라.

(2) $[x]_\beta = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$일 때, 좌표벡터 $[x]_\alpha$를 구하여라.

(3) $x = \begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$일 때, 식 (2)가 성립함을 보여라.

풀이

(1) $P = [I]_\beta^\alpha = [\,[y_1]_\alpha \quad [y_2]_\alpha\,]$이므로 기저 α에 관한 y_1, y_2의 좌표벡터를 각각 구한다.

$\begin{cases} y_1 = e_1 + 2e_2 \\ y_2 = -e_1 + e_2 \end{cases}$ 이므로 $[y_1]_\alpha = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $[y_2]_\alpha = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$이다.

따라서 $P = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$.

(2) $[x]_\alpha = P[x]_\beta = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}$

(3) $x = \begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} = 3e_1 + 9e_2$이고, 또 $x = \begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} = 4y_1 + 1y_2$이므로

$[x]_\alpha = \begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$, $[x]_\beta = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$이다.

따라서 $[x]_\alpha = \begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = P[x]_\beta$ ■

예제 4 $x_1 = (1, 2, 0)$, $x_2 = (1, 1, 1)$, $x_3 = (2, 0, 1)$, $y_1 = (4, -1, 3)$, $y_2 = (5, 5, 2)$,
$y_3 = (6, 3, 3)$일 때, R^3의 두 기저 $\alpha = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\beta = \{y_1, y_2, y_3\}$에 대하여 전이행렬 $P = [I]_\beta^\alpha$를 구하여라.

풀이

$P = [[y_1]_\alpha \ [y_2]_\alpha \ [y_3]_\alpha]$이므로 순서기저 α에 관한 y_1, y_2, y_3의 좌표벡터를 각각 구한다.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = y_1, \ (a_i \in R)$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = y_2, \ (b_i \in R)$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = y_3, \ (c_i \in R)$$

라 하면, 다음과 같은 3개의 연립방정식

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 3 \\ 2a_1 + a_2 \qquad &= -1 \\ a_2 + a_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_1 + b_2 + 2b_3 &= 7 \\ 2b_1 + b_2 \qquad &= 1 \\ b_2 + b_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= 6 \\ 2c_1 + c_2 \qquad &= 1 \\ c_2 + c_3 &= -4 \end{aligned}$$

은 모두 계수행렬로 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$을 갖는다. 이 세 개의 연립방정식은 RREF를 이용하여 동시에 계산이 가능하다. 즉, 행렬 $[A \ \vdots \ y_1 \ \vdots \ y_2 \ \vdots \ y_3]$를 RREF로 변환함으로써 a_i, b_i, $c_i (i = 1, 2, 3)$를 한 번에 구할 수 있다.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

의 RREF는

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

이고, 따라서 기저 β에서 기저 α로의 전이행렬은 다음과 같다.

$$P = [I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & -9 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/7-MA-transition-matrix.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu

```
A=matrix([[1, 1, 2], [2, 1, 0], [0, 1, 1]])
y1=vector([3, -1, 4])
y2=vector([7, 1, 1])
y3=vector([6, 1, -4])
B=column_matrix([y1, y2, y3])      # y1, y2, y3를 열벡터로 하는 행렬 생성
print A.augment(B)
print
print A.augment(B).rref()
```

```
[ 1  1  2  3  7  6]        [ 1  0  0 -2  2  5]
[ 2  1  0 -1  1  1]        [ 0  1  0  3 -3 -9]
[ 0  1  1  4  1 -4]        [ 0  0  1  1  4  5]
```

■

정리 7.9.2

두 집합 α와 β를 벡터공간 R^n의 서로 다른 기저라 하고 P를 기저 β에서 기저 α로의 전이행렬이라 하자. 그러면 P는 가역이고 P^{-1}는 기저 α에서 기저 β로의 전이행렬이다. 즉, $P^{-1} = [I]_{\alpha}^{\beta}$

예제 5 예제 4에 있는 R^3의 두 기저 α, β에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 기저 α에서 기저 β로의 전이행렬 $Q = [I]_{\alpha}^{\beta}$

(2) $[\mathrm{x}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$일 때, 좌표벡터 $[\mathrm{x}]_{\beta}$

풀이

(1) 기저 β에서 기저 α로의 전이행렬은 $P=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & -9 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$이므로 **정리** 7.9.2에

의하여 $Q=[I]_{\alpha}^{\beta}=P^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$

(2) $[\mathrm{x}]_{\beta}=Q[\mathrm{x}]_{\alpha}=\begin{bmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{13}{3} \\ 7 \\ -\frac{13}{3} \end{bmatrix}$ ■



[수학자 책갈피] http://blog.daum.net/with-learn/5432044

Chapter 7 연습문제

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm

문제 1 다음의 벡터들이 일차독립인지 아닌지를 행렬식을 이용하여 확인하여라.

$$v_1 = (1,\ 1,\ -3),\ v_2 = (0,\ 2,\ 1),\ v_3 = (0,\ -1,\ 0)$$

문제 2 다음에 주어진 집합 S가 R^3의 기저인지를 판정하여라.

(1) $S_1 = \{\ (2,0,1),\ (6,3,5),\ (0,-5,0)\}$

(2) $S_2 = \{(0,\ 2,\ 3),\ (2,\ 4,\ 1),\ (1,\ 3,\ 2)\}$

(Hint: http://math3.skku.ac.kr/spla/CLA-7.1-Exercise-2)

문제 3 R^3의 부분공간인 $x+2y+3z=0$에 대한 서로 다른 기저 두 개를 찾아라.

문제 4 다음에서 주어진 동차연립방정식의 해공간에 대한 기저와 차원을 구하여라.

(1) $4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$

(Hint: http://math1.skku.ac.kr/home/matrix1/261/)

(2) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$
$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0$
$5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 0$
$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0$

(Hint: http://math1.skku.ac.kr/home/pub/548/)

문제 5 다음에서 주어진 행렬 A의 영공간의 기저와 nullity(A)를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

문제 6 주어진 행렬 A의 열공간 $\mathrm{Col}(A)$의 기저와 차원 및 열계수 $c(A)$를 각각 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

문제 7 다음 주어진 행렬 A에 대하여 rank와 nullity를 구하고, 이것이 행렬에 대한 차원정리를 만족하는지 확인하여라.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

문제 8 다음 행렬에 대하여 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^T)$임을 확인하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

문제 9 아래의 표를 이용하여 A의 $\mathrm{Row}(A)$, $\mathrm{Null}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Null}(A^T)$의 차원을 각각 구하여라.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
A의 크기	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5
$\mathrm{rank}(A)$	3	2	1	3	2

문제 10 $A \in M_{m \times n}$에 대하여 $\text{rank}(A) = m$인 경우 A는 full row rank를 갖는다고 하고, $\text{rank}(A) = n$인 경우 A는 full column rank를 갖는다고 한다. 다음 행렬들이 full row rank인지, full column rank인지 또는 둘 다 아닌지 판정하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & -9 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

(Hint: http://math1.skku.ac.kr/home/pub/565/)

문제 11 벡터 $\mathbf{a} = (1, 2, -1, 1)$에 의해서 만들어지는 hyperplane $\mathbf{a}^{\perp} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0\}$의 기저와 차원을 구하여라.

문제 12 $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$일 때 벡터 $\mathbf{x}$의 $\text{span}\{\mathbf{a}\} = \langle \mathbf{a} \rangle$ 위로의 정사영 $\text{proj}_{\langle \mathbf{a} \rangle}\mathbf{x}$을 이용하여 선형변환 $T(\mathbf{x}) = \text{proj}_{\langle \mathbf{a} \rangle}\mathbf{x}$의 표준행렬 P를 구하여라.

문제 13 $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$일 때 벡터 $\mathbf{x}$의 $\text{span}\{\mathbf{a}\} = \langle \mathbf{a} \rangle$ 위로의 정사영 $\text{proj}_{\langle \mathbf{a} \rangle}\mathbf{x}$을 이용하여 $\mathbf{x}$를 $\mathbf{x}_1 \in \langle \mathbf{a} \rangle$, $\mathbf{x}_2 \in \langle \mathbf{a} \rangle^{\perp}$인 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$가 되는 $\mathbf{x}_1$과 $\mathbf{x}_2$를 구하여라.

문제 14 주어진 벡터 $\mathbf{x}$를 $\mathbf{a}$ 방향의 벡터 $\mathbf{x}_1$과 $\mathbf{a}$와 직교하는 벡터 $\mathbf{x}_2$의 합으로 표현하여라.
$\mathbf{x} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$

문제 15 A와 b가 다음과 같을 때 연립방정식 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$의 최소제곱해를 찾아라.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 & 4 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 5 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

문제 16 다섯 개 점 $(1,\ 5)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ -3)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 2)$을 지나는 최소제곱곡선 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$을 구하여라.

문제 17 집합 $\{(1,\ 1,\ 1),\ (3,\ 2,\ -5),\ (a,\ b,\ c)\}$이 직교집합이 되도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정하여라.

문제 18 다음 직교집합의 정규직교집합을 구하여라.
$\mathrm{v}_1=(-2,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{v}_2=(1,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{v}_3=(-2,\ -5,\ 1)$

문제 19 다음 R^4의 부분집합이 일차독립임을 보이고 이들을 정규직교화하여라.

(1) $\mathrm{v}_1=(0,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{v}_2=(1,\ 0,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{v}_3=(1,\ 1,\ 2,\ 1)$

(2) $\mathrm{v}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{v}_2=(-1,\ 4,\ 4,\ -1)$, $\mathrm{v}_3=(4,\ -2,\ 2,\ 0)$

문제 20 평면 $\pi : \{(x,y,z) | x-y+2z=0\}$와 벡터 $\mathrm{v}=(2,4,-3)$에 대하여 다음을 구하여라.
(내적은 $\langle \mathrm{u},\mathrm{v} \rangle = \mathrm{u}\cdot\mathrm{v}$로 한다.)

(1) 2차원 부분공간(평면)의 기저와 정규직교기저

(2) $proj_{\pi}\mathrm{v}$

문제 21 R^3의 순서기저 $\beta = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 2, 2)\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{x} = (7, -7, 5)$의 좌표벡터 $[\mathrm{x}]_\beta$를 구하여라.

(2) $\mathrm{y} = (1, -4, 4)$의 좌표벡터 $[\mathrm{y}]_\beta$를 구하여라.

(3) $\mathrm{x} + \mathrm{y}$의 좌표벡터 $[\mathrm{x} + \mathrm{y}]_\beta$를 구하여라.

(4) $3\mathrm{x}$, $5\mathrm{y}$의 좌표벡터 $[3\mathrm{x}]_\beta$, $[5\mathrm{y}]_\beta$를 각각 구하여라.

문제 22 $\alpha = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$, $\beta = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$가 R^2에서 기저라고 하고,
$\mathrm{u}_1 = (1, 2)$, $\mathrm{u}_2 = (2, 3)$, $\mathrm{v}_1 = (1, 3)$, $\mathrm{v}_2 = (1, 4)$라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 전이행렬 $[I]_\beta^\alpha$을 구하여라.

(2) 전이행렬 $[I]_\alpha^\beta$을 구하여라.

(3) 기저 α에 대해 $[\mathrm{w}]_\alpha = (1, 1)$일 때, $[I]_\alpha^\beta$를 이용하여 $[\mathrm{w}]_\beta$을 구하여라.

(4) 기저 β에 대해 $[\mathrm{w}]_\beta = (3, 2)$일 때, $[I]_\beta^\alpha$를 이용하여 $[\mathrm{w}]_\alpha$을 구하여라.

문제 P1 만일 A가 $m \times n$ 크기의 행렬이라 하자.
$\mathrm{rank}(A^T) + \mathrm{nullity}(A^T)$의 값은 무엇인가?

문제 P2 (Select one) If one replaces a matrix with its transpose, then

A. The image may change, but the kernel, rank, and nullity do not change.
B. The image, kernel, rank, and nullity may all change.
C. The image, rank, and kernel may change, but the nullity does not change.
D. The image, kernel, rank, and nullity all do not change.
E. The image, kernel, and nullity may change, but the rank does not change.
F. The kernel may change, but the image, rank, and nullity do not change.
G. The image and kernel may change, but the rank and nullity do not change.

문제 P3 (Select one) Let $T: R^3 \to R^5$ be a linear transformation. Then

A. T is invertible if and only if the rank is five.
B. T is one-to-one if and only if the rank is three; T is never onto.
C. T is onto if and only if the rank is two; T is never one-to-one.
D. T is one-to-one if and only if the rank is two; T is never onto.
E. T is onto if and only if the rank is three; T is never one-to-one.
F. T is onto if and only if the rank is five; T is never one-to-one.
G. T is one-to-one if and only if the rank is five; T is never onto.

문제 P4 (Select one) If a linear transformation $T: R^3 \to R^5$ is onto, then
A. The rank is three and the nullity is zero.
B. The rank and nullity can be any pair of non-negative numbers that add up to three.
C. The rank is three and the nullity is two.
D. The rank is two and the nullity is three.
E. The situation is impossible.
F. The rank and nullity can be any pair of non-negative numbers that add up to five.
G. The rank is five and the nullity is two.

문제 P5 (Select one) If a linear transformation $T: R^3 \to R^5$ is one-to-one, then
A. The rank is five and the nullity is two.
B. The situation is impossible.
C. The rank and nullity can be any pair of non-negative numbers that add up to five.
D. The rank is two and the nullity is three.
E. The rank is three and the nullity is zero.
F. The rank is three and the nullity is two.
G. The rank and nullity can be any pair of non-negative numbers that add up to three.

문제 P6

(1) 만일 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$이 m개의 선형방정식과 n개의 미지수로 되어 있는 선형연립방정식이라면, 그 해공간의 차원은 최대 얼마인가?

(2) R^6 안의 영 아닌 벡터 $\mathbf{a}$에 의해 만들어지는 hyperplane의 차원은 얼마인가?

(3) R^5의 부분공간의 차원은 얼마가 될 수 있는가? 모두 찾아라.

(4) R^4의 부분공간 중 다음의 벡터들 $\mathrm{v}_1=(1,0,1,0)$, $\mathrm{v}_2=(1,1,0,0)$, $\mathrm{v}_3=(1,1,1,0)$에 의하여 생성(span)된 공간의 차원은 얼마인가?

문제 P7 집합 $S=\{\mathrm{x}_1,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n\}$을 R^n의 기저라 할 때, A가 n차의 가역 행렬이면 $\{A\mathrm{x}_1,\ \ldots,\ A\mathrm{x}_n\}$도 R^n의 기저임을 증명하여라.

문제 P8 다음에 주어진 행렬 A가 A^TA와 같은 영공간과 행공간을 가지는지 확인하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

문제 P9 일차종속인 벡터들에 Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 적용하면 어떤 결과가 얻어지는가?

문제 P10 행렬 A의 열벡터가 모두 정규직교벡터라 하자. AA^T와 A의 열공간은 서로 어떻게 관계되는가?

문제 P11 $S=(2,1,0),(0,0,2),(4,1,5)$이 R^3를 생성(span)함을 보여라.

문제 P12 t값에 따라 다음 행렬 A의 계수(rank)가 어떻게 나타나는지 확인하여라.

$$A=\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ t & 1 & t \\ 1 & t & 1 \end{bmatrix}$$



Chapter 8

행렬의 대각화

8.1 선형변환의 행렬표현
8.2 닮음과 행렬의 대각화
8.3 직교대각화, *행렬 함수
8.4 이차형식
8.5 이차형식의 응용
8.6 SVD와 일반화된 역행렬
8.7 복소고유값과 고유벡터
8.8 Hermitian, 유니타리, 정규행렬
8.9 선형연립미분방정식
연습문제

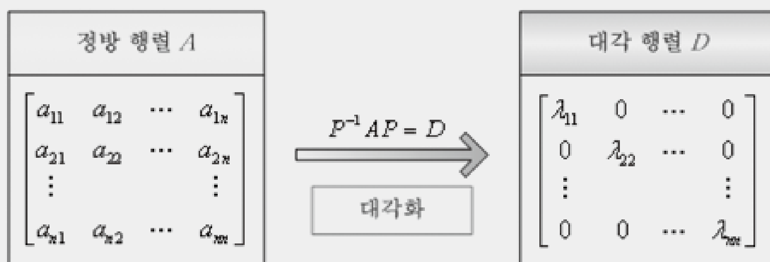
우리는 6장에서 에서 으로의 모든 선형변환은 표준행렬을 이용하여 행렬변환으로 나타낼 수 있음을 보았습니다. 이 표준행렬은 의 모든 벡터는 항상 표준기저의 일차결합으로 표시된다는 것으로부터 얻어졌습니다.
이 장에서는 일반적으로 임의의 순서기저(ordered basis)를 갖는 에서 으로의 선형변환에 대한 행렬표현을 좌표벡터를 이용하여 찾는 방법을 학습합니다. 또한 사이의 선형변환 의 다양한 기저에 대한 행렬표현 사이의 관계를 전이행렬(transition matrix)을 이용하여 알아보고, 행렬표현이 대각선행렬로 표현되는 경우인 행렬의 대각화에 대하여 살펴보겠습니다.

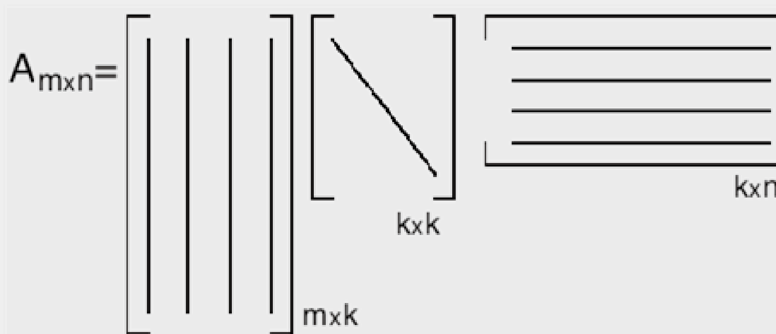
직교행렬은 자신의 전치행렬이 역행렬이므로 정말 편리하고 대칭행렬은 어떤 다른 종류의 행렬보다 응용에 많이 이용됩니다. 이 장에서는 대칭행렬의 효용성과 모든 대칭행렬은 직교 대각화가능함을 살펴보겠습니다.

* 이차형식(quadratic form)은 각 항이 이차인 다항식으로서 수학, 물리학, 경제학, 통계학, 이미지 처리기법 등 다양한 분야에서 사용됩니다. 이 형식을 해석할 때 행렬, 특히 대칭행렬이 매우 중요한 역할을 합니다. 이차형식(quadratic form)을 분석하는 과정에서 대칭행렬의 직교대각화가 어떻게 적용되는지를 알아보고 그 응용을 살펴보겠습니다.

앞에서 (정사각) 대칭행렬은 대각화가능함을 살펴본 후에는, 행렬대각화의 개념을 일반적인 행렬 로 확장하는 방법을 다루고, 최소제곱해와 역행렬의 일반화된 개념 및 응용을 소개합니다.

그리고 지금까지는 실수 고유값과 실수 성분을 갖는 고유벡터에만 집중하여 학습하였습니다. 그러나 실수행렬도 종종 복소고유값과 복소고유벡터를 갖게 됩니다. 따라서 복소수인 고유값과 그에 대응하는 고유벡터와 함께 복소성분의 행렬도 다룰 수 있어야 합니다. 실수에서의 대칭행렬과 직교행렬의 정의는 복소수에서 각각 Hermitian 행렬과 유니타리(unitary) 행렬로 일반화되는데, 이 장의 후반 절에서는 Hermitian 행렬과 유니타리 행렬을 정의하고, 복소행렬의 대각화 문제를 학습하겠습니다.





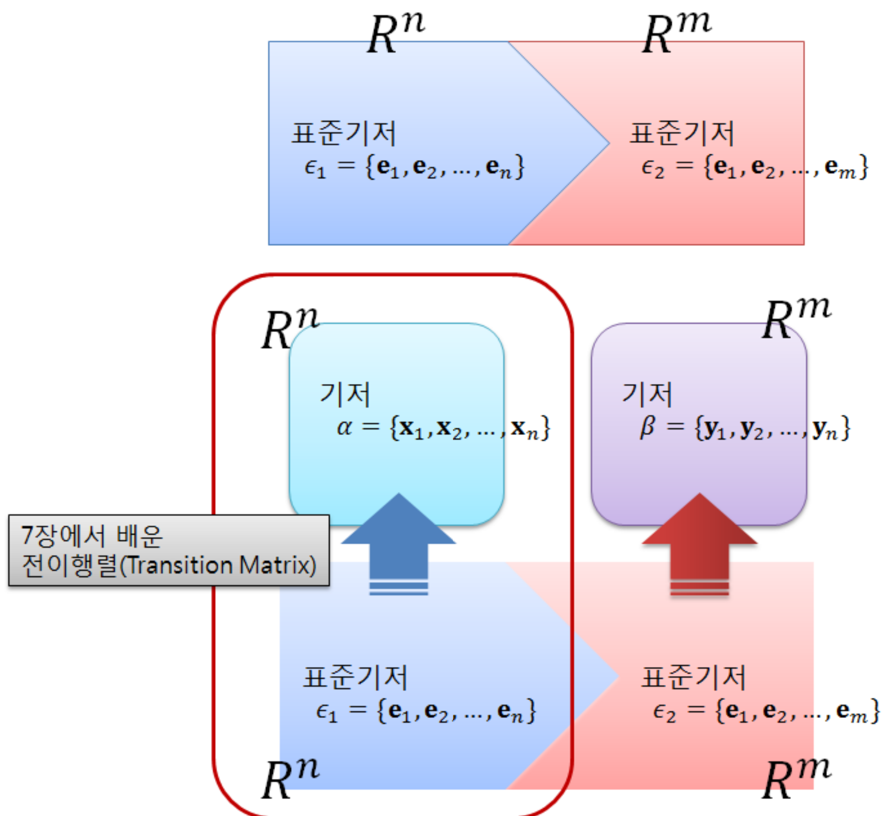
8.1 선형변환의 행렬표현

- 참고 동영상: http://youtu.be/jfMcPoso6g4
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-11-sec-8-1.html

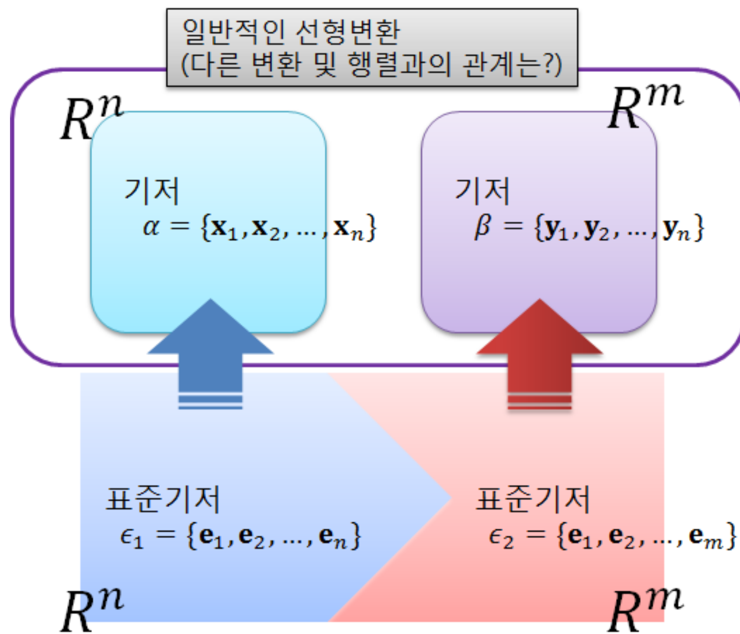


우리는 6장에서 R^n 에서 R^m 으로의 모든 선형변환은 표준행렬을 이용하여 행렬변환으로 나타낼 수 있음을 보았다. 이 표준행렬은 R^n 의 모든 벡터는 항상 표준기저의 일차결합으로 표시된다는 것으로부터 얻어졌다. 이 절에서는 임의의 순서기저(ordered basis)를 갖는 R^n 에서 R^m 으로의 선형변환에 대한 행렬표현을 좌표벡터를 이용하여 찾는 방법을 알아본다.

표준기저에 대한 선형변환의 표준행렬과 전이행렬의 관계도(복습)



임의의 순서기저(ordered basis)을 갖는 R^n에서 R^m으로의 선형변환에 대한 행렬표현



정리 8.1.1

$T : R^n \to R^m$을 $\mathrm{y} = T(\mathrm{x})\,(\mathrm{x} \in R^n)$로 정의된 선형변환이라 하고,

$$\alpha = \{\mathrm{x}_1, \ \dots, \ \mathrm{x}_n\}, \quad \beta = \{\mathrm{y}_1, \ \dots, \ \mathrm{y}_m\}$$

를 각각 R^n와 R^m의 순서기저라 하자. 그러면

$$[\mathrm{y}]_\beta = A' \ [\mathrm{x}]_\alpha = [T]_\alpha^\beta \ [\mathrm{x}]_\alpha$$

이고, 이러한 행렬 A'는 다음과 같다.

$$A' = [[T(\mathrm{x}_1)]_\beta : [T(\mathrm{x}_2)]_\beta : \cdots : [T(\mathrm{x}_n)]_\beta]$$

증명 임의의 벡터 $\mathrm{x} \in R^n$는 R^n의 기저 $\alpha = \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\}$에 있는 벡터에 의하여

$$\mathrm{x} = c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n$$

으로 유일하게 표현되며, α에 관한 x의 좌표벡터는

$$[\mathrm{x}]_\alpha = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

이다. T의 선형성에 의하여 $\mathrm{y} = T(\mathrm{x}) = c_1 T(\mathrm{x}_1) + c_2 T(\mathrm{x}_2) + \cdots + c_n T(\mathrm{x}_n)$이고, y는 R^m의 벡터이므로 기저 β에 관하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}[\mathrm{y}]_\beta &= c_1 [T(\mathrm{x}_1)]_\beta + c_2 [T(\mathrm{x}_2)]_\beta + \cdots + c_n [T(\mathrm{x}_n)]_\beta \\ &= [[T(\mathrm{x}_1)]_\beta : [T(\mathrm{x}_2)]_\beta : \cdots : [T(\mathrm{x}_n)]_\beta] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = A' [\mathrm{x}]_\alpha \end{aligned}$$

■

참고

(1) **정리 8.1.1**의 유용성은 $T(\mathrm{x})$의 값을 행렬의 곱으로 계산할 수 있음을 뜻한다. 즉,

$$[\mathrm{y}]_\beta = [T(\mathrm{x})]_\beta = [T]_\alpha^\beta [\mathrm{x}]_\alpha = A' [\mathrm{x}]_\alpha$$

(2) 행렬 $[T]_\alpha^\beta = A'$의 모양은 기저 α, β에 따라 변한다. 한 예로 순서 기저 α, β 안의 벡터들의 순서를 변경하면 A'의 열도 변함을 뜻한다.

(3) $A = [T] = [T]_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}$와 $A' = [T]_\alpha^\beta$는 같지는 않지만 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$A' = [T]_\alpha^\beta = [I]_{\epsilon_2}^\beta [T]_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} [I]_\alpha^{\epsilon_1} \cong [T]_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} = A$$

(4) $R^n = R^m$일 때 순서기저를 $\alpha = \beta$로 택하여 위와 같은 방법으로 얻어진 행렬 A'을 기저 **α에 관한 선형변환(선형연산자) T**의 행렬 표현이라 하고, 기호로 $A = [T]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha$로 표시한다.

예제 1

선형변환 $T: R^3 \to R^2$를 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - z \\ y - z \end{bmatrix}$이라 정의하고,

$$\alpha = \left\{ \mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \ \beta = \left\{ \mathrm{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

를 각각 R^3와 R^2의 순서기저라 하자. 이때 $A' = [T]_\alpha^\beta$를 구하여라.

풀이

$A' = [T]_\alpha^\beta = [[T(\mathrm{x}_1)]_\beta \ [T(\mathrm{x}_2)]_\beta \ [T(\mathrm{x}_3)_\beta]]_{2\times 3}$이므로 먼저 $T(\mathrm{x}_1)$, $T(\mathrm{x}_2)$, $T(\mathrm{x}_3)$를 구하면 다음과 같다.

$$T(\mathrm{x}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ T(\mathrm{x}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ T(\mathrm{x}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이제, 기저 α에 속한 벡터들의, 기저 β에 대한 좌표벡터를 각각 구하자.

$$T(\mathrm{x}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_1\mathrm{y}_1 + a_2\mathrm{y}_2 = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$T(\mathrm{x}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = b_1\mathrm{y}_1 + b_2\mathrm{y}_2 = b_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$T(\mathrm{x}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\mathrm{y}_1 + c_2\mathrm{y}_2 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이므로 이 세 개의 연립방정식을 각각 풀면 된다.

그런데 이 연립방정식의 계수행렬이 모두 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이므로 첨가행렬의 형태를 확장한 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 1 & \vdots & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & \vdots & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$을 RREF로 변환하여 다음 행렬을 구한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & \vdots & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \vdots & -1 & \vdots & \frac{1}{2} & \vdots & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

따라서 $(a_1, a_2) = (0, -1)$, $(b_1, b_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(c_1, c_2) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$이고

$$A' = [T]_\alpha^\beta = [[T(\mathrm{x}_1)]_\beta \, [T(\mathrm{x}_2)]_\beta \, [T(\mathrm{x}_3)_\beta]]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(참고로 $A = [T] = [T]_{e_1}^{e_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$이다.) ■

예제 2

선형변환 $T: R^2 \to R^3$를 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-3y \\ -2x+y \end{bmatrix}$이라 정의하고,

$$\alpha = \left\{ \mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},\ \beta = \left\{ \mathrm{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \mathrm{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{y}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

를 각각 R^2와 R^3의 순서기저라 하자. 이때 $A' = [T]_\alpha^\beta$를 구하여라.



풀이

$T(\mathrm{x}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $T(\mathrm{x}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$이므로ㅃ

$$[\mathrm{y}_1\ \ \mathrm{y}_2\ \ \mathrm{y}_3\ \vdots\ T(\mathrm{x}_1)\ \vdots\ T(\mathrm{x}_2)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & -2 & \vdots & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & -1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

이다. 이것을 RREF로 변환하면

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & -2 & \vdots & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & -1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{3}{2} & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 A'은 다음과 같다.

$$A' = [T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

① $[\mathrm{y}_1\ \ \mathrm{y}_2\ \ \mathrm{y}_3\ \vdots\ T(\mathrm{x}_1)\ \vdots\ T(\mathrm{x}_2)]$ 정의하기

```
x, y = var('x, y')
h(x, y) = [x+y, x-3*y, -2*x+y]
T = linear_transformation(QQ^2, QQ^3, h)
x1=vector([1, 1])
x2=vector([2, 1])
```

```
y1=vector([1, 0, -1])
y2=vector([-1, 2, 1])
y3=vector([0, 1, 1])
B=column_matrix([y1, y2, y3, T(x1), T(x2)])  # 열벡터로 이루어진 행렬 생성
print B
```

```
[ 1 -1  0  2  3]
[ 0  2  1 -2 -1]
[-1  1  1 -1 -3]
```

② RREF$[\mathrm{y}_1 \quad \mathrm{y}_2 \quad \mathrm{y}_3 \ \vdots \ T(\mathrm{x}_1) \ \vdots \ T(\mathrm{x}_2)]$ 구하기

```
C=B.echelon_form()
print C
```

```
[   1    0    0  1/2  5/2]
[   0    1    0 -3/2 -1/2]
[   0    0    1    1    0]
```

③ $[T]_\alpha^\beta$ 구하기

```
A=C.submatrix(0, 3, 3, 2)  # A.submatrix(a, b, c, d)
# 행렬의 (a+1, b+1) 성분부터 c개의 행, d개의 열로 이루어진 부분행렬
print A
```

```
[ 1/2  5/2]
[-3/2 -1/2]
[   1    0]
```

■

예제 3

선형변환 $T : R^2 \to R^3$를 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x-y \\ x+4y \end{bmatrix}$라 정의하고 R^2와 R^3의 순서기저를 각각 $\alpha = \{\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1\}$, $\beta = \{\mathrm{e}_3, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1\}$라 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $A' = [T]_\alpha^\beta$를 구하여라.

(2) $\left[T\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)\right]_\beta$을 (1)에서 구한 $A' = [T]_\alpha^\beta$을 이용하여 계산하여라.

(3) T의 정의로부터 $A = [T] = [T]_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}$와 $T\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$을 구하여라.

풀이

(1) $T(\mathrm{e}_2)=\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}$, $T(\mathrm{e}_1)=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ 이므로, $\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}_\beta=\begin{bmatrix}4\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}_\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

따라서 $A'=[T]_\alpha^\beta=\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\1&2\end{bmatrix}$

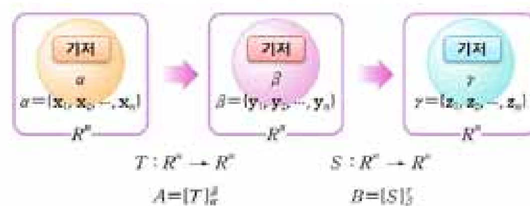
(2) $\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}_\alpha=\begin{bmatrix}6\\-4\end{bmatrix}$ 이므로,

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}\right)\right]_\beta=[T]_\alpha^\beta\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}_\alpha=A'\left(\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}\right)_\alpha=\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\-10\\-2\end{bmatrix}$$
$$=20\mathrm{e}_3+(-10)\mathrm{e}_2+(-2)\,\mathrm{e}_1$$

(참고로 $T\left(\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}\right)=\left[T\left(\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}\right)\right]_\epsilon=\begin{bmatrix}-2\\-10\\20\end{bmatrix}=(-2)\,\mathrm{e}_1+(-10)\mathrm{e}_2+20\mathrm{e}_3$ 이다.)

(3) $[T]_{\mathrm{e}_1}^{\mathrm{e}_2}=\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\\1&4\end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\cdot(-4)+6\\-4-6\\-4+4\cdot6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-10\\20\end{bmatrix}$ ■

참고 서로 다른 순서기저를 갖는 세 개의 벡터공간과 그 사이의 선형변환 T와 S 및 그의 행렬표현 A와 B



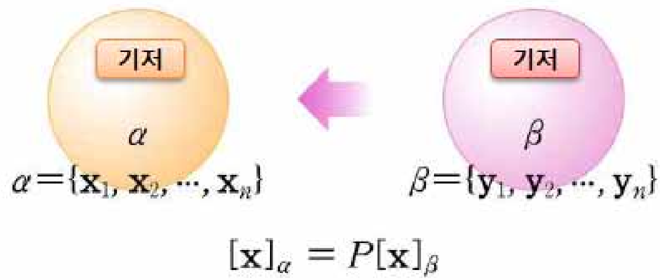
T와 S가 각각 α에서 β, β에서 γ라는 순서기저를 가진 벡터공간으로의 선형변환이라면, 이 선형변환은 각각 $A=[T]_\alpha^\beta$, $B=[S]_\beta^\gamma$와 같은 표준행렬을 가지게 된다. 그러면 합성변환 $S\circ T$의 표준행렬은 이 두 행렬에 의하여 결정되는데,

$$[S\circ T]_\alpha^\gamma=[S]_\beta^\gamma[T]_\alpha^\beta=BA$$

의 형태로 결정된다. 즉 간단한 행렬의 곱으로 합성변환의 표준행렬을 구할 수 있다.

참고 전이행렬(transition matrix)

$[\mathrm{x}]_\alpha = [I]_\beta^\alpha [\mathrm{x}]_\beta = P[\mathrm{x}]_\beta$에서 행렬 $P = [I]_\beta^\alpha$를 기저 β에서 기저 α로의 **전이행렬(transition matrix)**이라 한다. 이를 행렬변환 $T_P(\mathrm{x}) = P\mathrm{x}$로 생각할 수 있다.





[다각형 바퀴를 단 자동차와 그에 맞춘 도로]

8.2 닮음과 행렬의 대각화

- 참고 동영상: http://youtu.be/MnfLcBZsV-I
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-11-sec-8-2.html



이 절에서는 R^n 사이의 선형변환 T의 다양한 기저에 대한 행렬표현 사이의 관계를 전이행렬(transition matrix)을 이용하여 알아보고, 행렬표현이 간단한 형태인 대각선행렬로 표현되는 경우인 대각화에 대하여 알아본다.

참고 선형변환의 행렬표현 $[T] = [T]_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}$와 $[T]_\alpha^\beta$ 사이의 관계

$$[T]_\alpha^\beta = [I]_{\epsilon_2}^\beta [T]_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} [I]_\alpha^{\epsilon_1} = [I]_{\epsilon_2}^\beta [T] [I]_\alpha^{\epsilon_1}$$

정리 8.2.1

$T: R^n \to R^n$이 선형변환이고 α와 β가 R^n의 두 기저일 때,

$$A = [T]_\alpha, \quad A' = [T]_\beta$$

라 하자. 이때 기저 β에서 기저 α로의 전이행렬(transition matrix) $P = [I]_\beta^\alpha$에 대하여 $A' = P^{-1}AP$이 성립한다.

$$\begin{array}{ccc} [\mathbf{x}]_\beta & \xrightarrow{[T]_\beta = A'} & [T(\mathbf{x})]_\beta \\ P = [I]_\beta^\alpha \downarrow \cong & & P \downarrow \cong \uparrow Q = [I]_\alpha^\beta = P^{-1} \\ [\mathbf{x}]_\alpha & \xrightarrow[A = [T]_\alpha]{} & [T(\mathbf{x})]_\alpha \end{array}$$

$$A' = [T]_\beta = [I]_\alpha^\beta [T]_\alpha [I]_\beta^\alpha = P^{-1}AP$$

예제 1 선형변환 $T : R^2 \to R^2$ 을 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-y \\ x+3y \end{bmatrix}$ 으로 정의하자. R^2 의 기저 α 를 표준기저 ϵ 이라 하고, 또 다른 기저를 $\beta = \left\{ \mathrm{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 라 할 때, 전이행렬을 이용하여 $A' = [T]_\beta$ 을 구하여라.



표준기저 $\alpha = \epsilon$ 에 관한 T 의 표준행렬을 A 라 하면 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 이고, 기저 β 에서 표준기저 α 로의 전이행렬을 $[I]_\beta^\alpha = P$ 라 하면

$$P = [[\mathrm{y}_1]_\alpha \ : \ [\mathrm{y}_2]_\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 이다. 따라서 **정리** 8.2.1에 의하여 A' 은 다음과 같다.

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ ■

닮음

정의 [닮음]

정사각행렬 A, B 에 대하여 다음을 만족하는 가역행렬 P 가 존재할 때 B 는 A 와 **닮은 (similar) 행렬**이라고 한다.

$$B = P^{-1}AP$$

이때, $B \sim A$ 라 쓴다.

예제 2 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 에 대하여 $B = P^{-1}AP$ 이므로 B 는 A 와 닮은 행렬이다. 즉 $B \sim A$. ■

정리 8.2.2

n차의 정사각행렬 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A \sim A$

(2) $B \sim A \Rightarrow A \sim B$

(3) $B \sim A,\ A \sim C \Rightarrow B \sim C$

정리 8.2.3

n차의 두 정사각행렬 A, B가 닮음이면 다음이 성립한다.

(1) $\det(A) = \det(B)$

(2) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

증명 $A \sim B$이므로, $A = P^{-1}BP$를 만족하는 가역행렬 P가 존재한다.

(1) 행렬식의 정의에 의하여,

$\det(A) = \det(P^{-1}BP)$

$\Rightarrow\ \det(A) = \det(P^{-1})\det(B)\det(P)$ $(\because\ \det(AB) = \det(A)\det(B))$

$\Rightarrow\ \det(A) = \det(P^{-1})\det(P)\det(B)$

$\Rightarrow\ \det(A) = \det(B)$ $(\because\ \det(P^{-1}P) = 1 = \det(P^{-1})\det(P))$

(2) trace 함수에 대해서도 (1)과 유사한 방법으로 증명할 수 있다.

$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(BPP^{-1})$ $(\because\ \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(SA)\ )$

$= \mathrm{tr}(BI) = \mathrm{tr}(B)$ ■

닮음행렬들은 행렬식이 같기 때문에, 특성방정식, 고유값도 같다.
복잡한 행렬문제를 훨씬 단순한 모양의 닮음행렬을 찾아서 간단히 처리할 수 있다.

대각화가능한 행렬

정의 [대각화가능한 행렬]

A가 어떤 대각선행렬과 닮은 행렬일 때, 즉 적당한 가역행렬 P가 존재하여 $P^{-1}AP$가 대각선행렬일 때 A를 대각화가능한(diagonalizable) **행렬**이라 하며, 이때 행렬 P를 A를 대각화하는(diagonalizing) **행렬**이라고 한다.

- $P^{-1}AP = D$ (P는 가역행렬, A는 정사각행렬, D는 대각선행렬)라면

$$A^k = (PDP^{-1})^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \quad (k\text{번의 곱})$$
$$= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}$$
$$= PD^kP^{-1}$$

예제 3 가역행렬 $P=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$와 행렬 $A=\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}$에 대하여

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$$

이므로 A는 대각화가능하다. □

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/8-TF-diagonalizable.html



Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

```
A=matrix(QQ, [[1, 1], [-2, 4]])
print A.is_diagonalizable()          # 대각화 가능 여부 확인
```

```
True
```
■

예제 4 대각행렬 D는 $I^{-1}DI = D$이므로 대각화가능하다. ■

예제 5 행렬 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$이 대각화가능하지 않음을 보여라.



만일 A가 대각화가능하다고 가정하자. 즉,

$$P=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\ (ad-bc\neq 0),\ D=\begin{bmatrix}e&0\\0&f\end{bmatrix}$$

로서 $P^{-1}AP=D$(즉, $AP=PD$)가 성립한다고 하자. 그러면

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

또는, $\begin{bmatrix} ae & bf \\ ce & df \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$이 성립해야 한다. 그래서 $ce = 0$.

만일 $c \neq 0$이면 $e = 0$이므로, $ae = 0 = c(\neq 0)$이므로 모순이다.
그러므로 $c = 0$일 수밖에 없다.

마찬가지 방법으로 $d = 0$이므로, $ad - bc \neq 0$에 모순이므로 A는 대각화가능하지 않다. ■

대각화가능할 동치조건

정리 8.2.4 [대각화가능할 동치조건]

n차의 정사각행렬 A가 대각화가능할 **필요충분조건**은 A가 n개의 **일차독립인 고유벡터**를 갖는 것이다. 이때, A는 자신의 고유값 λ_1, …, λ_n을 주대각선성분으로 갖는 대각선행렬 D와 닮은 행렬이다.

증명 $(\Rightarrow)$ A가 대각화가능하면 적당한 가역행렬

$$P = [\mathrm{p}^{(1)} : \mathrm{p}^{(2)} : \cdots : \mathrm{p}^{(n)}]$$

에 대하여 $P^{-1}AP = B$인 대각선행렬 $B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$이 존재한다. 이때 $AP = PB$이므로 $A\mathrm{p}^{(1)} = b_1\mathrm{p}^{(1)}$, $A\mathrm{p}^{(2)} = b_2\mathrm{p}^{(2)}$, … , $A\mathrm{p}^{(n)} = b_n\mathrm{p}^{(n)}$이다.

따라서 $b_1, b_2, \ldots, b_n$은 A의 고유값이므로 $B = D$이다. 이때 $\mathrm{p}^{(1)}, \mathrm{p}^{(2)}, \ldots, \mathrm{p}^{(n)}$은 각각 고유값 $b_1 = \lambda_1, b_2 = \lambda_2, \ldots, b_n = \lambda_n$에 대응하는 고유벡터이다. 그런데 P가 가역이므로 이러한 n개의 고유벡터들은 일차독립이다.

$(\Leftarrow)$ A의 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$에 대응하는 일차독립인 고유벡터를 $\mathrm{p}^{(1)}, \mathrm{p}^{(2)}, \ldots, \mathrm{p}^{(n)}$이라 하고 이것을 열벡터로 갖는 행렬을

$P = [\mathrm{p}^{(1)} : \mathrm{p}^{(2)} : \ldots : \mathrm{p}^{(n)}]$이라 하자.
그러면

$$AP = [A\mathrm{p}^{(1)} : A\mathrm{p}^{(2)} : \ldots : A\mathrm{p}^{(n)}] = [\lambda_1\mathrm{p}^{(1)} : \lambda_2\mathrm{p}^{(2)} : \cdots : \lambda_n\mathrm{p}^{(n)}]$$

$$= [\mathrm{p}^{(1)} : \mathrm{p}^{(2)} : \cdots : \mathrm{p}^{(n)}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

그런데 P의 열벡터들은 일차독립이므로 P는 가역이다. 따라서 $P^{-1}AP = D$, 즉 A는 대각화가능하다. ■

참고 A를 대각화하는 행렬 P를 구하는 과정

- 1단계: A의 n개의 일차독립인 고유벡터 $\mathrm{p}^{(1)}, \mathrm{p}^{(2)}, \ldots, \mathrm{p}^{(n)}$을 구한다.
- 2단계: $\mathrm{p}^{(1)}, \mathrm{p}^{(2)}, \ldots, \mathrm{p}^{(n)}$을 열벡터로 갖는 행렬 P를 만든다.
- 3단계: 이 P가 A를 대각화하는 행렬이고 $P^{-1}AP$는 A의 대응하는 고유값 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$을 순서대로 주 대각선 성분으로 갖는 대각선행렬 D이다.

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

예제 6 행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$의 고유값은 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$이고, $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$가 고유값 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$에 각각 대응하는 A의 고유벡터이다. 이것들이 일차독립이므로 **정리 8.2.4**에 의하여 A는 대각화가능하다. 실제로 $P = [\mathrm{x}_1\ \mathrm{x}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$라 하면

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이다. ■

예제 7 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$는 대각화가능함을 보이고, 이때 A를 대각화하는 행렬 P를 구하여라.

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

```
A=matrix([[0, 0, -2], [1, 2, 1], [1, 0, 3]])
print A.eigenvalues()          # 고유값 계산
```

```
[1, 2, 2]
```

A의 서로 다른 고유값은 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$(중근)이다. 이제 각각의 고유값에 대응하는 A의 일차독립인 고유벡터를 구해보자.

$\lambda_1 = 1$인 경우 $A\mathrm{x} = \lambda_1 \mathrm{x}$ (즉, $(\lambda_1 I - A)\mathrm{x} = 0$)를 풀면

```
E=identity_matrix(3)
print (E-A).echelon_form()
```

```
[ 1  0  2]
[ 0  1 -1]
[ 0  0  0]
```

이므로 $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \in R)$를 얻는다. 대표적인 고유벡터는 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$인 경우 $A\mathrm{x} = \lambda_2 \mathrm{x}$ (즉, $(\lambda_2 I - A)\mathrm{x} = 0$)를 풀면

```
print (2*E-A).echelon_form()
```

```
[1 0 1]
[0 0 0]
[0 0 0]
```

이므로 $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(s, t \in R)$ 에서 대표적인 고유벡터는

$$\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

```
x1=vector([-2, 1, 1])
x2=vector([-1, 0, 1])
x3=vector([0, 1, 0])
P=column_matrix([x1, x2, x3])
print P
print
print P.det()
```

```
[-2 -1  0]
[ 1  0  1]
```

[1 1 0]

1

위의 계산과 같이 P의 행렬식이 0이 아니므로 P는 가역행렬 즉, 세 벡터 x_1, x_2, x_3는 일차독립이므로 **정리** 8.2.4에 의하여 A는 대각화가능하다.

```
print P^-1*A*P # 대각화 가능하다면 고유값을 대각원소로 하는 대각행렬 생성됨
```

[1 0 0]
[0 2 0]
[0 0 2] ■

예제 8 행렬 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$의 특성방정식은 $|\lambda I_3 - A| = (\lambda-2)(\lambda-3)^2 = 0$이므로 A의 고유값은 $\lambda=2$, 3이고 $\lambda=3$은 중근이다. 이 고유값에 대응하는 A의 고유벡터는

$$\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이므로 A는 세 개의 일차독립인 고유벡터를 갖지 않는다. 따라서 **정리** 8.2.4에 의하여 A는 대각화가능하지 않다. ■

정리 8.2.5

x_1, x_2, ..., x_k를 행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$의 서로 다른 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$에 대응하는 고유벡터라 하면 $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_k\}$는 일차독립이다.

정리 8.2.6

n차의 정사각행렬 A가 n개의 서로 다른 고유값을 가지면 A는 대각화가능하다.

증명 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$을 각각 A의 서로 다른 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$에 대응하는 고유벡터라 하면 **정리** 8.2.5에 의하여 이들은 일차독립이다. 따라서 **정리** 8.2.4에 의하여 A는 대각화가능한 행렬이다. ■

예제 9

예제 6에서 주어진 행렬 $A=\begin{bmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{bmatrix}$는 2개의 서로 다른 고유값을 가지므로 **정리** 8.2.6에 의하여 A는 대각화가능하다. ■

A가 대각화가능한 행렬이라 하더라도 A의 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 중에는 같은 것이 존재할 수 있다. 따라서 **정리** 8.2.6의 역은 성립하지 않는다.

대수적 중복도와 기하적 중복도

정의 [대수적 중복도와 기하적 중복도]

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$를 행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$의 서로 다른 고유값이라 하면 A의 특성다항식은

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

대수적 중복도

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 $m_1, m_2, \ldots, m_k$의 합은 n이 된다. 이때, 정수 m_i를 λ_i의 대수적 중복도(algebraic multiplicity)라 한다. 그리고 고유값에 대응하는 일차독립인 고유벡터의 수를 기하적 중복도(geometric multiplicity)라고 한다.

정리 8.2.7 [대각화 필요충분조건 2]

n차의 정사각행렬 A가 대각화가능할 필요충분조건은 각 고유값의 기하적 중복도를 모두 합하면 n이 되는 것이다.

증명 **정리 8.2.4**에 의하여 n차의 정사각행렬 A가 대각화가능할 필요충분조건은 n개의 일차독립인 고유벡터를 가져야 한다. 따라서 기하적 중복도는 일차독립인 고유벡터의 수를 의미하므로, 그 총합은 n개가 된다. ■

정리 8.2.8

n차 정사각행렬 A의 대수적 중복도는 항상 기하적 중복도보다 크거나 같다.

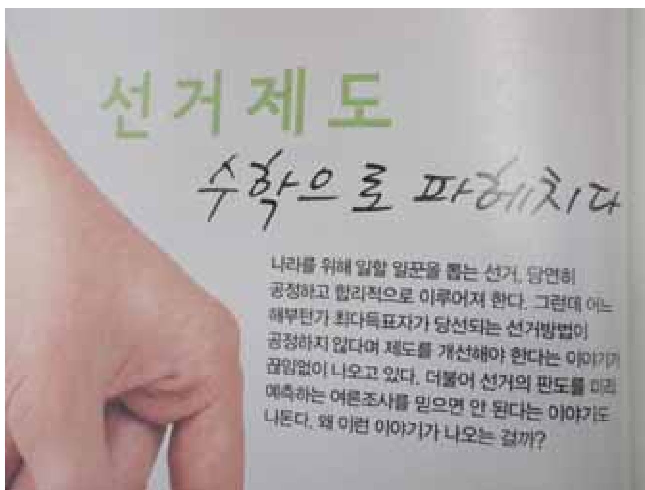
정리 8.2.9 [대각화 필요충분조건 3]

n차의 정사각행렬 A가 대각화가능할 필요충분조건은 행렬 A의 모든 고유값의 대수적 중복도와 기하적 중복도가 같을 조건이다.

예제 10

행렬 $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$의 고유값은 2, 2, 3이고, $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$에 의하여 대각화가능하다. 따라서 $A=PDP^{-1}$, $D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$이다. 다음이 성립한다.

$$A^5=PD^5P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 454 & -422 & 211 \\ 422 & -390 & 211 \\ 422 & -422 & 243 \end{bmatrix}$$ ■



8.3 직교대각화, *행렬 함수

- 참고 동영상: http://youtu.be/B--ABwoKAN4
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-11-sec-8-3.html



직교행렬은 자신의 전치행렬이 역행렬이므로 정말 편리하다. 그리고 대칭행렬은 어떤 다른 종류의 행렬보다 응용에 많이 이용된다. 이 절에서는 대칭행렬의 효용성과 모든 대칭행렬은 직교대각화가능함을 확인한다. 특히 마지막으로 행렬대각화의 응용으로 행렬함수를 다룬다.

직교행렬

정의 [직교행렬]

정사각행렬 A에 대하여 $A^{-1}=A^T$이면 A를 **직교행렬(real orthogonal matrix)**이라고 한다.

정리 8.3.1

행렬 A가 직교행렬이면 다음을 만족한다.

(1) 행렬 A의 행벡터들은 서로 수직이며, 정규벡터이다.
(2) 행렬 A의 열벡터들은 서로 수직이며, 정규벡터이다.
(3) A는 가역행렬이다.
(4) $\|A\mathbf{x}\|=\|\mathbf{x}\|$를 만족한다(즉, 길이를 보존한다).

증명 **정리 6.2.3의 증명**과 같은 방법으로 보인다.

예제 1

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$ 라 하면 $$A^T=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$ 이고

$$A^TA = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = I_3$$

이므로 A는 직교행렬이다. ■

● **직교행렬의 역행렬은 단지 전치행렬을 쓰기만 해도 구할 수 있다.**

정의 [직교닮음]

만일 A와 C가 같은 크기의 정사각행렬이라 할 때, $C = P^TAP$인 직교행렬 P가 존재하면, C는 A에 **직교닮음(orthogonally similar)**이라고 한다.

정의 [직교대각화 가능]

정사각행렬 A에 대하여 A를 대각화하는 직교행렬 P가 존재할 때 A는 **직교대각화가능(orthogonally diagonalizable)**하다고 하며 P는 A를 **직교대각화하는(orthogonally diagonalizing) 행렬**이라고 한다.

어떤 행렬들이 직교대각화가능한가? (대칭행렬)

정리 8.3.2

대칭행렬의 고유값은 모두 실수이다.

예제 2 대칭행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$의 특성방정식은 $|\lambda I_3 - A| = (\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$이므로 고유값은 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$이고 모두 실수이다. ■

정리 8.3.3

A가 대칭행렬이면, A의 서로 다른 고유값에 대응하는 고유벡터는 서로 직교한다.

정리 8.3.4

n차 정사각행렬 A가 직교대각화가능할 필요충분조건은 A가 대칭행렬인 것이다.

증명 ($\Rightarrow$) A가 직교대각화가능하므로 $P^TAP = D$인 직교행렬 P와 대각선행렬 D가 존재한다. 그런데 $D = D^T$이므로 다음 식을 얻는다.

$$P^TAP = D = D^T = (P^TAP)^T = P^TA^TP$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} P^TAP = P^TA^TP \quad &\Leftrightarrow \quad P(P^TAP)P^T = P(P^TA^TP)P^T \\ &\Leftrightarrow \quad (PP^T)A(PP^T) = (PP^T)A^T(PP^T) \\ &\Leftrightarrow \quad A = A^T \end{aligned}$$

즉, A는 대칭행렬이다.

($\Leftarrow$) : 생략 ■

정리 8.3.5

A가 대칭행렬이면 A는 n개의 고유벡터들의 정규직교집합을 갖는다.

증명 A가 대칭행렬이므로 **정리** 8.3.4으로부터 A는 직교대각화가능하다. 즉, $P^TAP = D$인 직교행렬 P와 대각선행렬 D가 존재한다. 따라서 A의 고유값들은 D의 대각선 성분이고 A의 n개의 일차독립인 고유벡터들은 P의 열벡터로서 취해질 수 있다. 그런데 P의 열벡터들은 정규직교집합을 이루므로 A는 n개의 고유벡터들의 정규직교집합을 갖는다. ■

정리 8.3.6

n차 정사각행렬 A에 대하여 다음은 동치이다.

(1) A는 직교대각화가능하다.
(2) A는 n개의 고유벡터들의 정규직교집합을 갖는다.
(3) A는 대칭행렬이다.

직교대각화하는 직교행렬 P를 어떻게 구할 것인가?

예제 3 대칭행렬 $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$를 직교대각화하는 행렬 P를 구하여라.



풀이

A의 특성다항식은 $|\lambda I_3 - A| = \lambda(\lambda+3)(\lambda-6) = 0$이므로 A의 고유값은 $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$이고, 대칭행렬의 서로 다른 고유값에 대응하는 고유벡터는 모두 직교집합(o.g.)이고 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

직교집합인 x_1, x_2, x_3를 정규화(o.n.)하면

$$\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\} \quad \therefore\ P = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$ ■

예제 4 행렬 $A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\ 3 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 0\end{bmatrix}$의 고유값은 $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ (중복도 2), $\lambda_3 = 6$이다.

$\lambda_1 = -3$에 대응하는 두 개의 일차독립인 고유벡터는 (수직이 아닐 수 있다)

$$\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

이고 Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 이용하면

$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{y}_2 = \mathrm{x}_2 - \frac{\mathrm{x}_2 \cdot \mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|^2}\mathrm{y}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{z}_1 = \frac{\mathrm{y}_1}{\|\mathrm{y}_1\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{z}_2 = \frac{\mathrm{y}_2}{\|\mathrm{y}_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 6$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이고 (이미 직교이므로) 정규화만 하면

$$\mathrm{z}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

따라서 직교행렬은 $P = [\mathrm{z}_1 : \mathrm{z}_2 : \mathrm{z}_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$이다. ■

참고 행렬 함수(Function of Matrices)

- http://youtu.be/B--ABwoKAN4

$$e^{\mathrm{A}} = \mathrm{I} + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{A}^2}{2!} + \frac{\mathrm{A}^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{\mathrm{A}t} = \mathrm{I} + \mathrm{A}t + \frac{\mathrm{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathrm{A}^3 t^3}{3!} + \cdots$$

$$f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \\ 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \vdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} \end{bmatrix}.$$

8.4 이차형식

- 참고 동영상: http://youtu.be/IznsULrqJ_0
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-12-sec-8-4.html



이차형식(quadratic form)은 각 항이 이차인 다항식으로서 수학, 물리학, 경제학, 통계학, 이미지 처리기법 등 다양한 분야에서 사용된다. 이 형식을 해석할 때 행렬, 특히 대칭행렬(symmetric matrix)이 매우 중요한 역할을 한다. 이 절에서는 이차형식을 분석하는 과정에서 대칭행렬의 직교대각화가 어떻게 적용되는지를 알아볼 것이다.

정의

두 변수 x, y를 갖는 이차곡선의 방정식

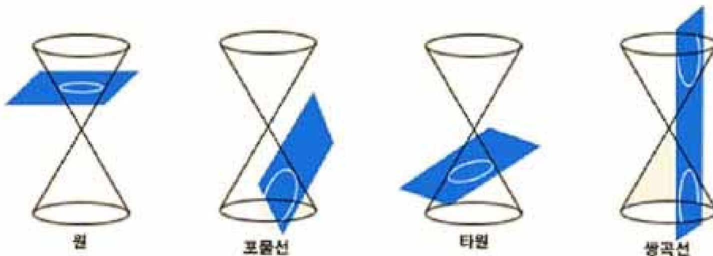
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (1)$$

을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$[x, y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d, e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0 \qquad (2)$$

참고 이차곡선의 그래프: 원뿔곡선(conic section)의 형태를 지닌다.

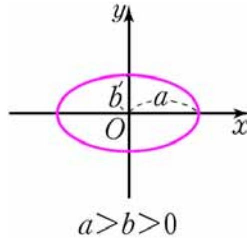
① 정상적인 원뿔곡선(non-degenerate conic section): 원, 타원, 포물선, 쌍곡선
② 허 원뿔곡선(imaginary conic section): 방정식 (1)을 만족하는 점 $(x, y) \in R^2$가 없을 때
③ 퇴화 원뿔곡선(degenerate conic section): 방정식 (1)의 그래프가 한 점, 한 직선, 또는 한 쌍의 직선으로 이루어지거나 존재하지 않을 때

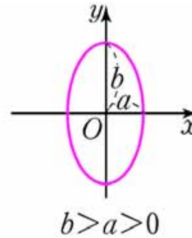


원(circle) 포물선(parabola) 타원(ellipse) 쌍곡선(hyperbola)

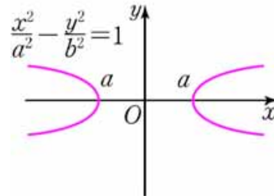
참고 표준위치(standard position)에 있는 원뿔곡선

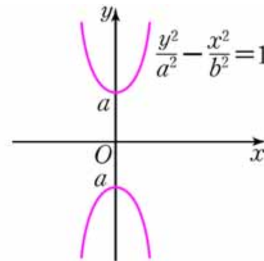
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (타원) (3)



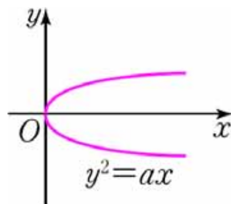


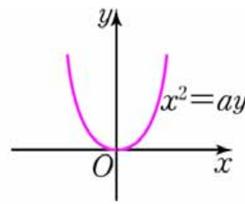
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 또는 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ (쌍곡선) (4)





- $y^2=ax$ 또는 $x^2=ay$ (포물선, $a>0$) (5)





예제 1

방정식 $9x^2+4y^2-144=0$ 은 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 로 표현되므로 이 방정식의 그래프는 타원이다. 또, 방정식 $9x^2-4y^2+144=0$ 은 $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$ 로 표현되므로 이 방정식의 그래프는 쌍곡선이다. 그리고 방정식 $y^2+3x=0$ 은 $y^2=-3x$ 로 표현되므로 이 방정식의 그래프는 포물선이다. ■

예제 2 $x^2=0$의 그래프는 y축이다. 방정식 $y^2-9=0$의 그래프는 $y=3$, $y=-3$인 한 쌍의 평행인 직선이다. $x^2-y^2=0$의 그래프는 $y=x$와 $y=-x$인 한 쌍의 직선이다. 방정식 $x^2+y^2=0$의 그래프는 $(0, 0)$의 한 점으로 이루어진다. 방정식 $x^2+y^2+1=0$의 그래프는 존재하지 않는다. ■

● 이차방정식에서 x^2항과 x항, y^2항과 y항을 갖는 이차방정식의 그래프는 표준위치로부터 평행이동된 원뿔곡선이다.

예제 3 방정식 $3x^2-2y^2-18x+4y+19=0$은 완전제곱꼴로 만들면

$$3(x-3)^2-2(y-1)^2=6 \qquad (6)$$

이므로 $x'=x-3$, $y'=y-1$로 치환하면 새로운 $x'y'$-좌표계에서 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{(x')^2}{2}-\frac{(y')^2}{3}=1$$

이 식은 $x'y'$-좌표계에서 표준위치에 있는 쌍곡선의 방정식이다. 따라서 식 (6)의 그래프는 $x'y'$-좌표계에서 표준위치에 있는 쌍곡선을 x-축으로 3만큼, y-축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다. ■

이차형식

정의 [이차형식]

$$[x, y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2 \qquad (7)$$

을 이차방정식 (1)에 관한 **이차형식(quadratic form)**이라고 한다.

예제 4 $2x^2+6xy+y^2$, x^2+y^2은 이차형식이고, $3x^2-6xy+y^2-3x+1$은 $-3x$와 1이 이차항이 아니므로 이차형식이 아니다. ■

일반적인 이차형식은 행렬을 도입하여 행렬곱의 형태인 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}$꼴로 표현할 수 있다.

$$3x^2+7y^2-2xy=[x\ \ y]\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \text{ 또는 } 3x^2+7y^2-2xy=[x\ \ y]\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

- 앞으로는 A를 대칭행렬로 사용하여 다음과 같이 나타내도록 한다.

$$ax^2+by^2+cxy=[x\ \ y]\begin{bmatrix}a & \frac{c}{2}\\ \frac{c}{2} & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz=[x\ \ y\ \ z]\begin{bmatrix}a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2}\\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2}\\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

이와 같이 대칭행렬을 택하는 이유는 직교대각화가 가능하기 때문이다.

정의

$A=[a_{ij}]$가 n차의 대칭행렬이고, n개의 변수 $x_1, x_2, \dots, x_n$을 성분으로 갖는 R^n의 벡터 $\mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$에 대하여 이차다항식

$q(\mathrm{x})=(\ <A\mathrm{x},\mathrm{x}\geq\ )\ \mathrm{x}^{\mathrm{T}}A\mathrm{x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 을 R^n상의 이차형식이라 한다.

이차형식에서 xy항을 교차항이라 한다. 대칭행렬의 직교대각화를 이용하면 교차항을 제거할 수 있다.

- 이차형식

$$q(\mathrm{x})=\mathrm{x}^T A\mathrm{x}\ =ax^2+2bxy+cy^2$$

에서 행렬 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$가 대칭행렬이므로 고유값 λ_1, λ_2에 대응하는 A의 정규직교인 고유벡터 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$를 찾을 수 있고, $P=[\mathrm{v}_1\ \ \mathrm{v}_2]$라 하면 A는 P에 의하여 직교대각화 가능하다.

즉, $P^TAP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ 이다. 이때, 고유벡터 v_1과 v_2는 λ_1과 λ_2의 역할을 바꾸어서 교환할 수 있으므로 일반성을 잃지 않고 $\det(P)=1$이라 할 수 있다.

따라서 직교행렬 P는 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$꼴의 R^2의 회전행렬이다. 이러한 행렬 P에 의하여 얻어진 새로운 좌표계를 $x'y'$-좌표계라 하고 $\mathrm{x}'=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$이라 하자. 그러면 $\mathrm{x}=P\mathrm{x}'$이고

$$\begin{aligned} q(\mathrm{x}) &= \mathrm{x}^TA\mathrm{x}=(P\mathrm{x}')^TA(P\mathrm{x}')=(\mathrm{x}')^T(P^TAP)\mathrm{x}' \\ &= [x' \ \ y']\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2 \end{aligned}$$

이므로 이차형식 q는 새로운 좌표계에서는 교차항이 없이 표현된다. 따라서 다음 정리를 얻는다.



8.4.1 [R^2의 주축정리]

대칭행렬 $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$의 고유값을 λ_1, λ_2라 할 때, 좌표축의 회전에 의하여 이차형식 $q(\mathrm{x})=\mathrm{x}^TA\mathrm{x}$는 새로운 $x'y'$-좌표계에서

$$q(\mathrm{x})=\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2 \qquad (8)$$

으로 표현될 수 있다. 이 회전은 행렬식이 1이고 A를 대각화하는 직교행렬을 P라 할 때 $\mathrm{x}=P\mathrm{x}'$이라는 치환에 의하여 얻어진다.



이차형식의 대각화를 이용하여 다음 방정식이 어떤 이차곡선을 나타내는지를 결정하여라.

$$3x^2+2xy+3y^2-8=0 \qquad (9)$$

풀이

이차방정식 $3x^2+2xy+3y^2-8=0$은

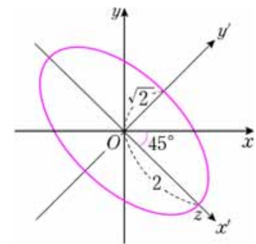
$$\mathrm{x}^TA\mathrm{x}=[x \ \ y]\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=8$$

로 나타낼 수 있고, A의 특성방정식은 $|A-\lambda I|=(3-\lambda)^2-1=(\lambda-2)(\lambda-4)=0$ 이므로 고유값은 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=4$이다. 따라서 **정리** 8.4.1에 의하여 $q(\mathrm{x})=\mathrm{x}^T A\mathrm{x}=2(x')^2+4(y')^2$ 이다. 따라서 새로운 좌표계에서 이차곡선의 방정식은

$$2(x')^2+4(y')^2=8$$

이다. 그런데 고유값 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=4$에 대응하는 정규직교인 고유벡터들은

$$\mathrm{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ \mathrm{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$



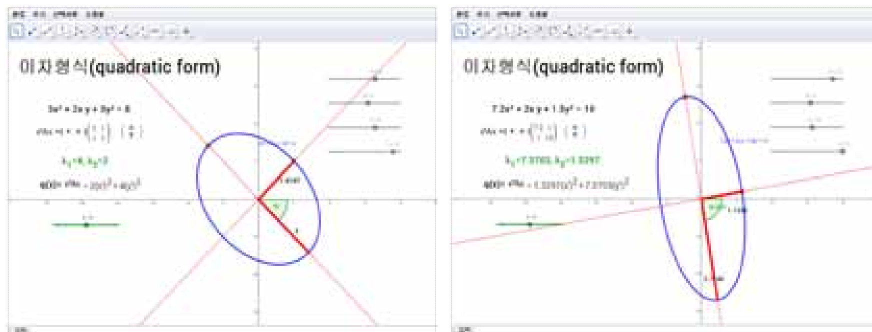
이므로 직교행렬 P는

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-45°) & -\sin(-45°)\\ \sin(-45°) & \cos(-45°)\end{bmatrix}$$

이다. 따라서 $x'y'$-축은 xy-축을 시계반대방향으로 $-45°$만큼 (즉, 시계방향으로 $45°$ 만큼) 회전한 축이고, 식 (9)는 $x'y'$-축에서의 타원이다. ■

참고 이차형식(quadratic form)(컴퓨터 시뮬레이션)

- http://www.geogebratube.org/student/m121534



예제 6 다음 방정식의 그래프를 그려라.

$$34x^2-24xy+41y^2-40x-30y-25=0 \tag{10}$$

풀이

$A=\begin{bmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{bmatrix}$, $B=[-40,\ -30]$, $\mathrm{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$라 하면 식 (10)의 행렬 표현은

$$\mathrm{x}^T A\mathrm{x}+B\mathrm{x}-25=0 \tag{11}$$

이다. 먼저 회전이동을 하여 교차항을 소거하자. A의 특성방정식

$$|A-\lambda I|=(\lambda-25)(\lambda-50)=0$$

으로부터 A의 고유값은 $\lambda_1=25$, $\lambda_2=50$이고, 이에 대응하는 정규직교인 고유벡터는 각각 $\mathrm{v}_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{v}_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$이므로 $P=[\mathrm{v}_1 : \mathrm{v}_2]=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$이다.

R^2의 주축정리에서 $\mathrm{x}=P\mathrm{x}'$이므로 $\mathrm{x}^T A\mathrm{x}=25(x')^2+50(y')^2$, $B\mathrm{x}=BP\mathrm{x}'=-50x'$이고, 따라서 식 (11)로부터 다음을 얻는다.

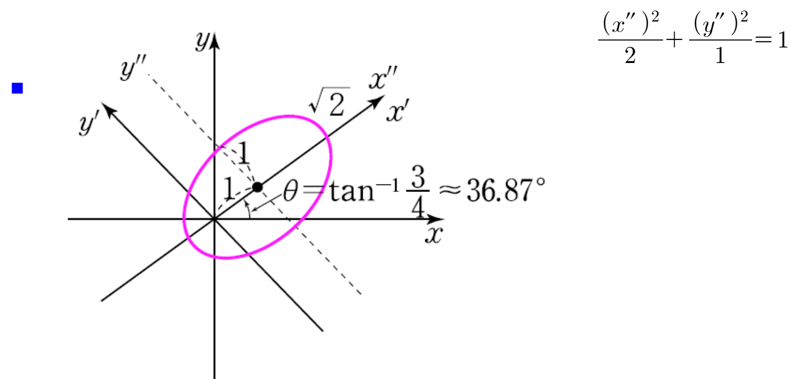
$$25(x')^2+50(y')^2-50x'-25=0 \tag{12}$$

이제, 평행이동을 하여 방정식 (12)의 x'을 소거하자. 식 (12)를 완전제곱꼴로 바꾸면

$$25[(x')^2-2(x')+1]+50(y')^2=25+25=50$$

즉, $25(x'-1)^2+50(y')^2=50$이므로 식 (12)는 $x'y'$-좌표축을 x'축 방향으로 1만큼 평행이동한 $x''y''$-축에서 다음과 같이 나타내어지는 타원의 방정식이다.

$$\frac{(x'')^2}{2}+\frac{(y'')^2}{1}=1$$



■

이차형식의 대각화를 이용한 3차원 곡면

- 이차형식 (7)을

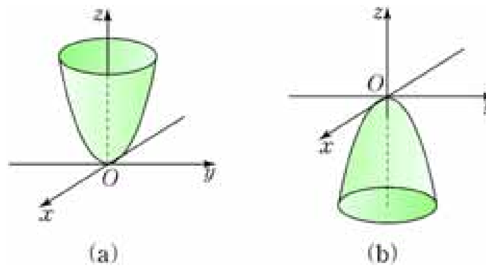
$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{13}$$

라 하고 이것을 대각화하면 회전된 $x'y'z$−좌표계에서는

$$z = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 \tag{14}$$

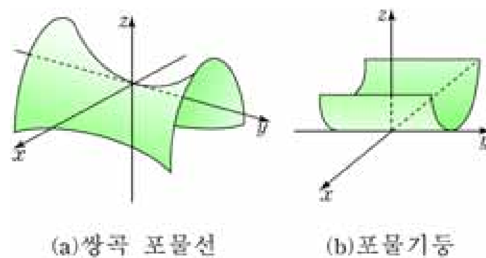
으로 변환되므로 R^3 상에서 식 (13)의 그래프를 쉽게 알 수 있다.

식 (14)에서 λ_1, λ_2가 모두 양이라면, 이 그래프는 아래 그림 (a)와 같이 위쪽이 열린 포물면(paraboloid)이다. 또한, λ_1, λ_2가 모두 음이라면 그림 (b)와 같이 아래쪽이 열린 포물면이다. 이러한 포물면의 수평절단면은 타원이므로 타원포물면(elliptic paraboloid)이라고 한다.



(a) (b)

- 또한 식 (14)에서 λ_1, λ_2가 모두 영이 아니고 서로 다른 부호이면, 이 그래프는 아래 그림 (a)와 같이 안장 모양의 쌍곡포물면(hyperbolic paraboloid)이 된다. λ_1, λ_2 중 하나가 영이라면, 그래프는 그림 (b)와 같은 포물기둥(parabolic cylinder)이 된다.



(a)쌍곡 포물선 (b)포물기둥



다음 방정식의 그래프가 타원포물면임을 설명하고 $z=50$일 때의 단면을 그려라.

$$z = 34x^2 - 24xy + 41y^2 \quad (15)$$

풀이

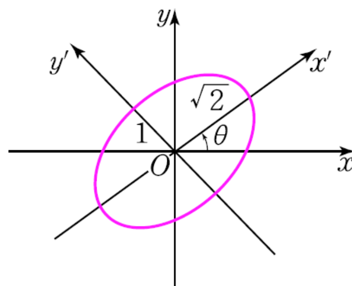
식 (15)의 우변을 대각화하는 행렬 P를 구하면 $P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$이므로 $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$로 치환하면 식 (15)는 다음과 같이 변환된다.

$$z = 25(x')^2 + 50(y')^2 \quad (16)$$

식 (16)은 회전된 $x'y'z$-좌표계에서 타원포물면이다. 여기서 $x'y'$-좌표계는 xy-좌표계를 $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$에 의하여 시계반대방향으로 θ만큼 회전한 것이므로

$$P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

으로부터 회전각 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$을 얻는다. 이제, 식 (15)의 포물면을 $z=50$으로 자른 단면을 그리자. 식 (16)에 $z=50$을 대입하여 정리하면 $\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{1} = 1$이므로 이 그래프는 다음 그림과 같다. □



Sage풀이 http://sage.skku.edu

① 행렬 A의 고유값 구하기

```
A=matrix(2, 2, [34, -12, -12, 41])
print A.eigenvalues()
```

```
[50, 25]
```

② 행렬 A 의 고유벡터 구하기

```
print A.eigenvectors_right()
```

```
[(50, [(1, -4/3)], 1),
(25, [(1, 3/4)], 1)]
```

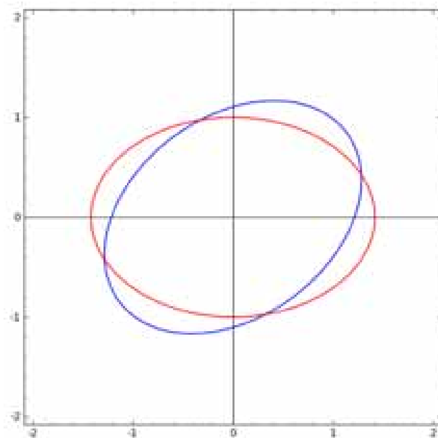
③ 행렬 A 를 대각화시키는 행렬 P 구하기

```
G=matrix([[1, 3/4], [1, -4/3]])  # 고유벡터를 행벡터로 하는 행렬 생성
P=matrix([1/G.row(j).norm()*G.row(j) for j in range(0,2)])
# 행벡터를 정규화(이 문제에서는 고유값이 다르므로 이미 직교는 된다)
P=P.transpose()  # 정규화된 고유벡터를 열벡터로 하는 행렬 생성
print P
```

```
[ 4/5  3/5]
[ 3/5 -4/5]
```

④ 두 타원을 동시에 그리기

```
var('u, v')
s=vector([u, v])
B=P.transpose()*A*P
p1=implicit_plot(s*A*s==50, (u, -2, 2), (v, -2, 2), axes='true')
p2=implicit_plot(s*B*s==50, (u, -2, 2), (v, -2, 2), color='red', axes='true')
show(p1+p2)  # 그림을 동시에 그리기
```



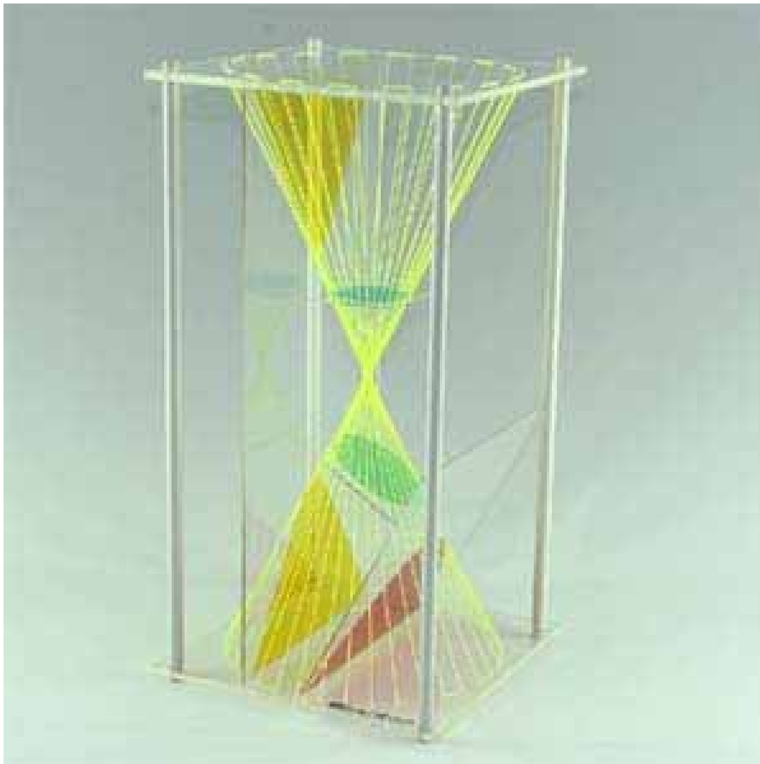
■

8.5 *이차형식의 응용

- 참고 동영상: http://youtu.be/cOW9qT64e0g
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-12-sec-8-5.html



앞에서 소개한 주축정리에 의하여 3차원 곡면의 그래프는 각각의 2차원 평면에서 원, 타원 또는 포물선 등의 형태로 나타난다. 구체적인 모양은 주축정리의 핵심인 고유값의 부호에 따라 결정된다. 이 절에서는 이차형식 그래프의 형태를 구분하는 이차형식의 부호를 정의하고, 이를 이용하여 다변수함수의 극값을 구하는 법을 배운다.



참고 이차형식의 응용과 Sage:
http://matrix.skku.ac.kr/2014-Album/Quadratic-form/

8.6 SVD와 일반화된 역행렬

- 참고 동영상: http://youtu.be/7-qG-A8nXmo
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-12-sec-8-6.html



(정사각) 대칭행렬은 대각화가능함을 알았다. 그러면 이제 행렬대각화의 개념을 일반적인 $m \times n$ 행렬 A로 확장하는 방법을 다루고, 최소제곱해와 역행렬의 일반화된 개념 및 응용을 소개한다.

정리 8.6.1 [특이값 분해 정리]

행렬 A를 $m \times n$의 실수 행렬이라 하자. 그러면 다음과 같은 직교(orthogonal)행렬 U, V와 대각선행렬 Σ가 존재한다.

$$U^T A V = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma \qquad (\Sigma \in M_{m \times n}) \tag{1}$$

여기서 Σ_1은 주대각선성분이 모두 (단조감소의 순서로 배열된) 양수이고, 가역인 대각선행렬, O은 영행렬이다. 즉,

$$A = U\Sigma V^T = [\mathrm{u}_1 \mathrm{u}_2 \cdots \mathrm{u}_k \mathrm{u}_{k+1} \cdots \mathrm{u}_m] \left[\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & \sigma_k & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1^T \\ \mathrm{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathrm{v}_n^T \end{bmatrix}$$

(단 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$)

정의

위의 행렬 Σ의 대각선성분들을 행렬 A의 **특이값(singular value)**들이라 하고, U의 열들을 A의 **left singular vector**, V의 열들을 A의 **right singular vector**라고 한다.

- U와 V는 대칭행렬 A^TA와 AA^T를 직교대각화하는 직교행렬이다.

정리 8.6.2

$m \times n\ (m \geq n)$ 크기의 행렬 $A = U\Sigma V^T$를 특이값분해(SVD, singular value decomposition)라 하고 r을 행렬 A의 계수(rank)라 하자. 그러면

(1) $V^T(A^TA)V = \text{diag}\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0\right)_{n\times n}$

(2) $U^T(AA^T)U = \text{diag}\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0\right)_{m\times m}$

증명 정리 8.6.1에 의하여, $A^TA = (V\Sigma^TU^T)(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T\Sigma V^T = V\Sigma' V^T$ 및 $AA^T = U\Sigma\Sigma^TU^T = \text{diag}\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0\right)_{m\times m}$인 직교행렬 U 및 V와, 대각선성분이 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0$인 n차의 대각선행렬 Σ'와 m차의 대각선행렬 Σ가 존재한다. 즉, (대칭행렬 A^TA과 AA^T에 대하여)

$$V^TA^TAV = \Sigma' = \text{diag}\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0\right)_{n\times n} \text{ 와}$$
$$UAA^TU^T = \Sigma = \text{diag}\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0\right)_{m\times m}$$

이 성립한다. ■

예제 1

행렬 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$의 특이값분해(SVD)를 구하여라.

풀이

$A^TA = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$의 고유값을 구하면 $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$이고, 행렬 A의 특이값은 $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$이다.

$\lambda_1 = 9$에 대응하는 A^TA의 단위고유벡터는 $\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$,

$\lambda_2 = 1$에 대응하는 A^TA의 단위고유벡터는 $\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$이고,

같은 방법으로 AA^T에 대응하는 두 개의 단위고유벡터는

$$\mathrm{u}_1 = (\frac{1}{\sigma_1} A\mathrm{v}_1 =) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{u}_2 = (\frac{1}{\sigma_2} A\mathrm{v}_2 =) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

이다. 따라서

$$U = [\mathrm{u}_1 \ \mathrm{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad V = [\mathrm{v}_1 \ \mathrm{v}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

이라 하면, 행렬 A의 특이값분해(SVD)는 다음과 같다.

$$A = U\Sigma V^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

① 행렬 A의 특이값과 A^TA의 고유벡터 구하기

```
A=matrix([[sqrt(3), 2], [0, sqrt(3)]])
B=A.transpose()*A
eig=B.eigenvalues()
sv=[sqrt(i) for i in eig]              # 특이값 구하기
print B.eigenvectors_right()            # A^TA의 고유벡터 구하기
```

```
[(9, [(1, sqrt(3))], 1), (1, [(1, -1/3*sqrt(3))], 1)]
```

② V^T 구하기

```
G=matrix([[1, sqrt(3)], [1, -1/3*sqrt(3)]])
Vh=matrix([1/G.row(j).norm()*G.row(j) for j in range(0,2)])
Vh=Vh.simplify()    # V의 전치행렬
print Vh
```

```
[        1/2 1/2*sqrt(3)]
[1/2*sqrt(3)        -1/2]
```

③ AA^T의 고유벡터 구하기

```
C=A*A.transpose()
print C.eigenvectors_right()          # AA^T의 고유벡터 구하기
```

```
[(9, [(1, 1/3*sqrt(3))], 1), (1, [(1, −sqrt(3))], 1)]
```

④ U 구하기

```
F=matrix([[1, 1/3*sqrt(3)], [1, −sqrt(3)]])
U=matrix([1/F.row(j).norm()*F.row(j) for j in range(0,2)])
U=U.simplify().transpose()     # U
print U
```

```
[ 1/2*sqrt(3)          1/2]
[          1/2 -1/2*sqrt(3)]
```

⑤ 대각선행렬 S 구하기

```
S=diagonal_matrix(sv); S
```

```
[3 0]
[0 1]
```

⑥ $A = USV^T$ 임을 확인

```
U*S*Vh
```

```
[sqrt(3)       2]
[      0 sqrt(3)]
```

■

가역행렬의 동치정리(SVD)

정리 8.6.3

$n \times n$ 행렬 A가 가역행렬(nonsingular matrix)이기 위한 필요충분조건은 행렬의 특이값들이 모두 0이 아니라는 것이다.

증명 $\det(AA^T) = (\det A)^2$이므로 행렬 A가 가역이기 위한 필요충분조건은 AA^T가 가역이어야 한다. 그런데 행렬이 가역이기 위한 필요충분조건은 그것의 고유값들이 0이 아니어야 하므로, **정리** 8.6.2에 의하여 특이값들이 0이 아니어야 한다. ■

정리 8.6.4

$m \times n$ 행렬 A에서 r개의 특이값들이 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$이라 하자. 그러면 행렬 A는 다음과 같다.

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \mathrm{u}_j \mathrm{v}_j^T$$

- 일반화된 역행렬 (pseudo-inverse) : 최소제곱해 연구에 중요하다.

- A가 크기 $n \times n$인 가역행렬인 경우 특이값 분해에 의해

$$A = U \Sigma V^T \qquad (2)$$

로 표현할 수 있다. 여기에서, U, Σ, V는 모두 $n \times n$인 가역행렬들이고, 특히 U, V는 직교행렬들이다. 그러므로 A의 역행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^T \qquad (3)$$

- 이제 행렬 A가 정사각행렬이 아니거나, 비가역인 정사각행렬인 경우에는 (3)식은 적용할 수 없다. 그러나 (2)의 가운데 행렬을 $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}$(여기서 Σ_1은 가역행렬)로 생각하면 모든 행렬 A에 대한 행렬곱 $V \Sigma' U^T$을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$A^{\dagger} = V \Sigma' U^T = V \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^T$$

정의 [일반화된 역행렬]

행렬 A가 크기 $m \times n$인 경우 크기 $n \times m$인 행렬 $A^{\dagger} = V \Sigma' U^T$를 **행렬 A의 pseudo-inverse**라 한다. 여기서 U, V는 직교행렬이고, Σ'은 다음과 같은 행렬이다.

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \text{ (여기서 } \Sigma_1 \text{은 가역행렬)}$$

- $A^{\dagger}$은 A 'dagger' 로 읽는다. $A = O$인 경우 $A^{\dagger} = O$로 정의한다.

예제 2 행렬 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 의 pseudo-inverse를 구하여라.



A의 특이값 분해는

$$A=[\mathrm{u}_1\ \mathrm{u}_2]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{v}_1^T\\ \mathrm{v}_2^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3} & 0\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

이므로 위 정의에 의하여

$$A^{\dagger}=[\mathrm{v}_1\ \mathrm{v}_2]\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{u}_1^T\\ \mathrm{u}_2^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$ ■

- http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/8-MA-pseudo-inverse.html



● 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$의 $\mathrm{rank}A=n$일 때 A는 full column rank를 갖는다고 한다. 이때 A^TA는 가역행렬이다. pseudo-inverse는 A가 가역행렬인 경우 역행렬 A^{-1}과 일치한다.

정리 8.6.5

행렬 A가 full column rank를 갖는 $m\times n$ 행렬이면, A의 pseudo-inverse는

$$A^{\dagger}=(A^TA)^{-1}A^T$$

이다.

증명 $A = U\Sigma V^T$를 특이값분해라 하자. 이때 $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ O \end{bmatrix}$(여기서 Σ_1은 가역행렬이다). 그러면

$$A^TA = (V\Sigma^T U^T)(U\Sigma V^T) = V\Sigma_1^2 V^T$$

A가 full column rank를 가지므로 A^TA는 가역행렬이고 행렬 V은 $n\times n$인 직교행렬이다. 그러므로 $(A^TA)^{-1} = V\Sigma_1^{-2}V^T$이고,

$$\begin{aligned}(A^TA)^{-1}A^T &= (V\Sigma_1^{-2}V^T)(U\Sigma V^T)^T = (V\Sigma_1^{-2}V^T)(V\Sigma^T U^T) \\ &= (V\Sigma_1^{-2}V^T)(V[\Sigma_1 \;\; O]U^T) = V[\Sigma_1^{-1} \;\; O]U^T = A^\dagger\end{aligned}$$

■

예제 3 다음 행렬의 pseudo-inverse를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

풀이

A가 full column rank를 가지므로,

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$는 가역행렬이고,

$$A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

■

정리 8.6.6

$A^\dagger$를 $m\times n$ 행렬 A의 pseudo-inverse라 하면,

(1) $AA^\dagger A = A$
(2) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$
(3) $(AA^\dagger)^T = AA^\dagger$
(4) $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$
(5) $(A^T)^\dagger = (A^\dagger)^T$
(6) $A^{\dagger\dagger} = A$

참고

pseudo-inverse는 최소제곱해를 찾는데 특이값 분해를 이용하는 방법을 제공하므로 매우 중요한 역할을 한다. 선형연립방정식 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$의 최소제곱해는 이미 알고 있듯이 정규방정식 $A^TA\mathrm{x}=A^T\mathrm{b}$ 의 해이다. 이 경우 A가 full column rank를 가지면 행렬 A^TA는 가역행렬이므로 유일해

$$\mathrm{x}=(A^TA)^{-1}A^T\mathrm{b}=A^{\dagger}\mathrm{b}$$

가 존재한다. 따라서 full rank column인 경우 최소제곱해는 pseudo-inverse $A^{\dagger}$와 b의 곱이다.

정리 8.6.7

A가 $m\times n$ 행렬이고, b는 R^n의 임의의 벡터이면, $\mathrm{x}=A^{\dagger}\mathrm{b}$는 (최소의 에러를 갖는) $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$의 최소제곱해이다.

증명 $A=U\Sigma V^T$를 A의 특이값분해라 하자. 이때 $\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_1 & O\\ O & O\end{bmatrix}$(여기서 Σ_1은 가역)이다. 그러면 $A^{\dagger}=V\Sigma' U^T=V\begin{bmatrix}\Sigma_1^{-1} & O\\ O & O\end{bmatrix}U^T$이므로 $A^{\dagger}\mathrm{b}=V\Sigma' U^T\mathrm{b}$이다.

$$\Rightarrow (A^TA)A^{\dagger}\mathrm{b}=V\Sigma^T\Sigma V^TV\Sigma' U^T\mathrm{b}=V\Sigma^T\Sigma\Sigma' U^T\mathrm{b}$$
$$=V\begin{bmatrix}\Sigma_1^2 & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_1^{-1} & O\\ O & O\end{bmatrix}U^T\mathrm{b}=V\Sigma^TU^T\mathrm{b}=A^T\mathrm{b}$$

따라서 $\mathrm{x}=A^{\dagger}\mathrm{b}$는 $A^TA\mathrm{x}=A^T\mathrm{b}$를 만족한다. ■

예제 4 다음 네 점 $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$를 지나는 least square line을 구하여라.

풀이

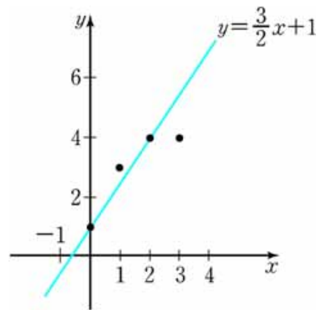
$y=mx+b$가 $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$을 지나므로 주어진 조건을 연립방정식으로 만들어 행렬로 표현하면, $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $\mathrm{b}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 4\\ 4\end{bmatrix}$일 때 $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$가 되고,

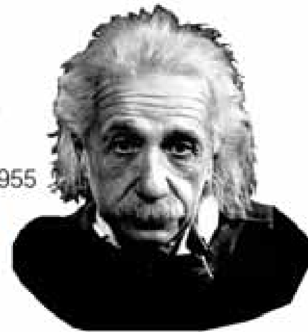
A는 full column rank를 가지므로,

$A^{\dagger}=(A^TA)^{-1}A^T$를 구하면,

$$A^{\dagger}=\begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{-3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ 이므로 $\mathbf{x}= A^{\dagger}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

그러므로 구하려는 least square line은 $y = \frac{3}{2}x + 1$ 이다. ■





순수수학은 마치 논리적 생각들로
엮은 한 편의 **시**와도 같다
아인슈타인 1879–1955

절대적 진리와 인식의 한계를 밝힌 **상대성이론**
현대과학은 아인슈타인 이전과 이후로 나뉜다

8.7 복소고유값과 고유벡터

- 참고 동영상: http://youtu.be/Ma2er-9LC_g
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-13-sec-8-7.html



지금까지는 실수 고유값과 실수 성분을 갖는 고유벡터에만 집중하여 학습하였다. 그러나 실수행렬도 종종 복소고유값과 복소고유벡터를 갖게 된다. 따라서 복소수인 고유값과 그에 대응하는 고유벡터와 함께 복소성분의 행렬도 다룰 수 있어야 한다.

복소공간

정의 [복소공간]

n개의 복소수 성분을 갖는 벡터들의 집합을

$$C^n = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid z_k \in C,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

이라 하고, **복소수 n-공간**이라 한다. R^n상에서 정의된 벡터의 덧셈과 스칼라배와 같은 방법으로 C^n상의 덧셈연산과 스칼라를 복소수 C로 택하면 복소수 n-공간 C^n도 R^n과 마찬가지로 **벡터공간**이 된다.

- C^n의 n개의 일차독립인 단위벡터를

$$\mathrm{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathrm{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathrm{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

이라 하면 C^n의 임의의 벡터 v는 $\mathrm{v} = z_1\mathrm{e}_1 + z_2\mathrm{e}_2 + \cdots + z_n\mathrm{e}_n$로 나타낼 수 있으므로 $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n\}$은 C^n의 기저이다. 이 기저를 **C^n에 대한 표준기저(standard basis)**라고 한다.

- 복소수 $z = a + bi$에 대하여 $\bar{z} = a - bi$를 z의 **켤레복소수(conjugate)**라 하고 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$을 복소수 z의 **크기**라 한다. 그리고 복소수를 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$로 표현하면 $r = |z|$이고 $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$이다. $\mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$에 대하여 $\bar{\mathrm{u}} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_n})$이다.

- [예제] http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/9-VT-conjugate.html

내적



정의 [내적]

u= $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$과 v= $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$을 C^n의 두 벡터라 하면 아래에 정의되는

$$\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}=\overline{v_1}u_1+\overline{v_2}u_2+\cdots+\overline{v_n}u_n=<\mathrm{u},\mathrm{v}>$$

은 내적의 공리를 모두 만족한다.

(1) $<\mathrm{u},\mathrm{v}>=\overline{<\mathrm{v},\mathrm{u}>}$
(2) $<\mathrm{u}+\mathrm{v},\mathrm{w}>=<\mathrm{u},\mathrm{w}>+<\mathrm{v},\mathrm{w}>$
(3) $<c\mathrm{u},\mathrm{v}>=c<\mathrm{u},\mathrm{v}>$
(4) $<\mathrm{v},\mathrm{v}>\ \geq 0$, 특히 $<\mathrm{v},\mathrm{v}>\ =0 \Leftrightarrow \mathrm{v}=0$

정의

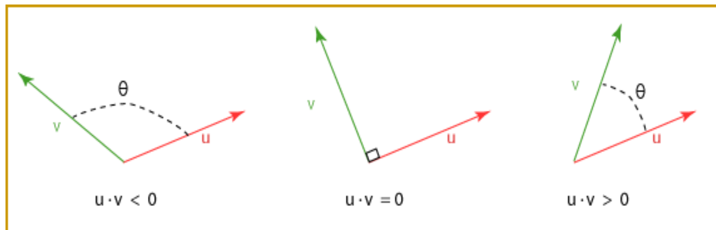
C^n의 두 벡터 u= $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, v = $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$의 유클리드 내적 u · v, u의 유클리드 노름 $\|\mathrm{u}\|$, u 와 v 사이의 유클리드 거리 $d(\mathrm{u},\mathrm{v})$를 각각 다음과 같이 정의한다.

(1) $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}=\overline{v_1}u_1+\overline{v_2}u_2+\cdots+\overline{v_n}u_n=<\mathrm{u},\mathrm{v}>$

(2) $\|\mathrm{u}\|=(\mathrm{u}\cdot\mathrm{u})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{|u_1|^2+|u_2|^2+\cdots+|u_n|^2}$

(3) $d(\mathrm{u},\mathrm{v})=\|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|=\sqrt{|u_1-v_1|^2+|u_2-v_2|^2+\cdots+|u_n-v_n|^2}$

- u · v $=0$인 경우 u와 v가 직교(orthogonal)라고 한다.





예제 1 벡터 $\mathrm{u} = (2i,\ 0,\ 1+3i)$, $\mathrm{v} = (2-i,\ 0,\ 1+3i)$의 유클리드 내적과 유클리드 거리를 구하여라.

풀이

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = \overline{(2-i)}\,(2i) + 0 \cdot 0 + \overline{(1+3i)}\,(1+3i)$$
$$= (2i)(2+i) + 0 + (1+3i)(1-3i) = 4i + 2i^2 + 1 - 9i^2 = 8 + 4i$$

$$d(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \|\mathrm{u}-\mathrm{v}\| = \sqrt{|2i-(2-i)|^2 + |0-0|^2 + |(1+3i)-(1+3i)|^2}$$
$$= \sqrt{|-2+3i|^2 + 0 + 0} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

```
u=vector([2*I, 0, 1+3*I])   # I 는 허수단위
v=vector([2-I, 0, 1+3*I])
print v.hermitian_inner_product(u)  # 앞에 오는 벡터에 대하여 켤레복소수를 취함
# 〈 u, v 〉 = v.hermitian_inner_product(u)
print (u-v).norm()
```

```
4*I + 8
sqrt(13)
```
■

실수행렬의 복소고유값과 고유벡터

정리 8.7.1

만일 λ가 $n \times n$ 실수행렬 A의 고유값이고 x가 그에 대응하는 고유벡터라면 $\overline{\lambda}$도 A의 고유값이고 $\overline{\mathrm{x}}$는 그에 대응하는 고유벡터이다.

증명 고유벡터는 $\mathrm{x} \neq 0$이므로 $\overline{\mathrm{x}} \neq 0$이고 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$이므로 $A\overline{\mathrm{x}} = \overline{A\mathrm{x}} = \overline{\lambda\mathrm{x}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathrm{x}}$ 이다.
$(\because\ \overline{A} = A)$ ■

실대칭행렬의 고유값

정리 8.7.2

A가 실대칭행렬이면, A는 실수인 고유값만을 갖는다.

증명 λ를 A의 고유값이라 하면 $A\mathrm{x}=\lambda\mathrm{x}$, $(\mathrm{x}\neq 0)$을 만족한다. 양변에 $\mathrm{x}^* = \overline{\mathrm{x}^T}$를 곱하면 $\mathrm{x}^*A\mathrm{x}=\mathrm{x}^*(\lambda\mathrm{x})=\lambda\mathrm{x}^*\mathrm{x}=\lambda(\mathrm{x}\cdot\mathrm{x})=\lambda\|\mathrm{x}\|^2$이다. 그러므로 $\lambda=\dfrac{\mathrm{x}^*A\mathrm{x}}{\|\mathrm{x}\|^2}$. 여기에서 $\|\mathrm{x}\|^2$은 0이 아닌 실수이므로, $\mathrm{x}^*A\mathrm{x}$가 실수임을 보이면 λ는 실수임이 보여진다. 그런데

$$\overline{\mathrm{x}^*A\mathrm{x}}=\overline{\mathrm{x}^*}\,\overline{A\mathrm{x}}=\mathrm{x}^T(\overline{A\mathrm{x}})=(\overline{A\mathrm{x}})^T\mathrm{x}=(\overline{A}\,\overline{\mathrm{x}})^T\mathrm{x}=\mathrm{x}^*A^*\mathrm{x}=\mathrm{x}^*A\mathrm{x}$$

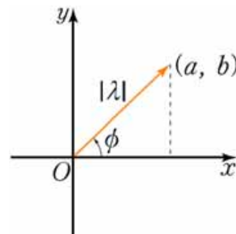
이므로, $\mathrm{x}^*A\mathrm{x}$는 실수이다. ■

예제 2 실계수행렬 $C=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$의 고유값은 $\lambda=a\pm bi$이다. 만일 a, b가 둘 다 0이 아니라면, C는 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$로 분해됨을 보여라. 여기서 ϕ는 원점과 점 (a, b)를 잇는 선분과 양의 x축과의 사이의 각이다.

풀이

C의 특성방정식은 $(\lambda-a)^2+b^2=0$이므로 $\lambda=a\pm bi$이다. a, b가 둘 다 0이 아니면 $a=|\lambda|\cos\phi$, $b=|\lambda|\sin\phi$이다.

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{a}{|\lambda|} & -\frac{b}{|\lambda|} \\ \frac{b}{|\lambda|} & \frac{a}{|\lambda|} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$ ■



8.8 Hermitian, 유니타리, 정규행렬

- 참고 동영상: http://youtu.be/GLGwj6tzd60
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-13-sec-8-8.html



지금까지 실수성분을 갖는 n차의 정사각행렬 전체의 집합을 M_n으로 나타내었다. 복소수성분을 갖는 n차의 정사각행렬 전체의 집합을 $M_n(C)$로 나타내기로 한다. M_n에서의 대칭행렬과 직교행렬의 정의는 $M_n(C)$에서 각각 Hermitian 행렬과 유니타리(unitary) 행렬로 일반화되는데, 이 절에서는 Hermitian 행렬과 유니타리 행렬을 정의하고, 복소행렬의 대각화 문제를 학습한다.

켤레전치행렬

정의 [켤레전치행렬]

복소행렬 $A=[a_{ij}]\in M_{m\times n}(C)$에 대하여 $\overline{A}$를

$$\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]\in M_{m\times n}(C)$$

이라 정의하고, $\overline{A}^{\,T}$를 A의 **켤레전치행렬(conjugate transpose)**이라 하며 A^*로 나타낸다. 즉, $A^* = \overline{A}^{\,T} = [\overline{a_{ji}}\ ]_{n\times m}$

참고

- C^n상의 복소벡터에 대해 정의한 유클리드 내적: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}^*\mathbf{u}$, $\|\mathbf{u}\|^2=\mathbf{u}^*\mathbf{u}$
- 행렬 A가 실수행렬이면 $A^* = A^T$이다.

예제 1

행렬 $A=\begin{bmatrix}1+i & -i & 0\\ 2 & 3-2i & i\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1+2i\\ 1-2i & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$에 대하여 A, B, C의 켤레전치행렬은 각각 다음과 같다.

$$A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \ B^* = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 0 \end{bmatrix}, \ C^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$ ■

정리 8.8.1 [켤레전치행렬의 성질]

복소행렬 A, B와 임의의 복소수 c에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(A^*)^* = A$
(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$
(3) $(cA)^* = \bar{c}A^*$
(4) $(AB)^* = B^*A^*$

Hermitian 행렬

정의 [Hermitian 행렬]

정사각 복소행렬 A가 $A = A^*$이면, A를 **Hermitian 행렬**이라 한다.

예제 2 예제 1의 행렬 A는 $A \neq A^*$이므로 Hermitian 행렬이 아니고, B는 $B = B^*$이므로 Hermitian 행렬이다. ■

정리 8.8.2 [Hermitian 행렬의 성질]

행렬 $A \in M_n(C)$가 Hermitian 행렬일 때, 다음이 성립한다.

(1) 임의의 복소벡터 $\mathrm{x} \in C^n$에 대하여 $\mathrm{x}^* A \mathrm{x}$는 실수이다.
(2) A의 고유값은 모두 실수이다.
(3) A의 서로 다른 두 개의 고유값에 대응하는 각각의 고유벡터는 서로 수직이다.

예제 3

행렬 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1-i\\ 0 & 1+i & 0\end{bmatrix}$는 $A=A^*$이므로 Hermitian 행렬이고, A의 특성방정식 $|A-\lambda I|=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-2)=0$의 근을 구하면 $\lambda=1,\ 1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}$이다. 따라서 Hermitian 행렬 A의 고유값은 모두 실수임을 확인할 수 있다. 또한 $\lambda=1$에 대응하는 고유벡터 x, $\lambda=1+\sqrt{3}$에 대응하는 고유벡터 y, $\lambda=1-\sqrt{3}$에 대응하는 고유벡터 z

$$\mathrm{x}=(1,0,0),\ \mathrm{y}=\left(0,\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)(-1+\sqrt{3}),1\right),\ \mathrm{z}=\left(0,\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)(1+\sqrt{3}),1\right)$$

은 모두 수직이다. ■

반-Hermitian 행렬

정의 [반-Hermitian 행렬]

복소행렬 A가 $A=-A^*$이면 A를 **반-Hermitian(skew-Hermitian) 행렬**이라 한다.

예제 4

다음 행렬 A, B는 모두 반-Hermitian 행렬임을 쉽게 확인할 수 있다.

$$A=\begin{bmatrix}-i & -5i\\ -5i & 3i\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & i & 0\\ i & 0 & 0\end{bmatrix},\quad A^*=\begin{bmatrix}i & 5i\\ 5i & -3i\end{bmatrix}=-A$$ ■

- 모든 정사각 복소행렬 $A\in M_n(C)$는 Hermitian 행렬 H와 반-Hermitian 행렬 K에 의하여 $A=H+K$로 표현할 수 있다. 특히, $A+A^*$는 Hermitian 행렬이고, $A-A^*$는 반-Hermitian 행렬임을 이용한다면, 모든 정사각 복소행렬 A는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$A=\frac{1}{2}(A+A^*)+\frac{1}{2}(A-A^*)$$

유니타리 행렬

정의 [유니타리 행렬]

행렬 $U \in M_n(C)$가 $U^*U = I_n$이면 U를 **유니타리(unitary) 행렬**이라고 한다.
정의에 의하여 U가 유니타리 행렬이면 $U^* = U^{-1}$이다. 또한, U의 j 번째 열벡터를 u_j라 하면

$$\mathrm{u_i} \cdot \mathrm{u_j} = <\mathrm{u_i}, \mathrm{u_j}> = \mathrm{u_j^* u_i} = \begin{cases} 1 & (\mathrm{i} = \mathrm{j}) \\ 0 & (\mathrm{i} \neq \mathrm{j}) \end{cases}$$

이므로 U가 유니타리 행렬일 필요충분조건은 U의 열들이 C^n에서 정규직교집합을 이룬다.

예제 5 다음 행렬 A는 유니타리 행렬임을 보여라.

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & -1+i \end{bmatrix}$$

풀이

$A^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & -1-i \end{bmatrix}$이므로 $A^*A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & -1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & -1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$이다.

따라서 $A = [\mathrm{a}_1 : \mathrm{a}_2]$는 유니타리 행렬이다. 그리고 실제로

$$\mathrm{a}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{bmatrix}, \ \mathrm{a}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

라 하면 $\mathrm{a}_i \cdot \mathrm{a}_j = \mathrm{a}_j^* \mathrm{a}_i = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$이다. 예를 들면

$$\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2 = \mathrm{a}_2^* \mathrm{a}_1 = \frac{1}{4}[1+i \quad -1+i]\begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} = 0$$

■

정리 8.8.3 [유니타리 행렬의 성질]

복소 n-공간 C^n에 유클리드 내적이 정의되어 있고 U가 유니타리 행렬이면 다음이 성립한다.

(1) $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in C^n$에 대하여 $(U\mathrm{x}) \cdot (U\mathrm{y}) = (\mathrm{x} \cdot \mathrm{y})$이다. 특히, $\|U\mathrm{x}\| = \|\mathrm{x}\|$이다.
(2) λ가 U의 고유값이면 $|\lambda| = 1$이다.
(3) U의 서로 다른 두 개의 고유값에 대응하는 각각의 고유벡터는 직교한다.

● $\|U\mathrm{x}\| = \|\mathrm{x}\|$임은 유니타리 행렬변환은 크기를 보존(isometry)함을 보여준다.

유니타리 닮음과 유니타리 대각화 가능

정의 [유니타리 닮음과 유니타리 대각화 가능]

두 행렬 $A, B \in M_n(C)$에 대하여 $U^*AU = B$인 유니타리 행렬 U가 존재하면, A와 B는 **유니타리 닮음(unitarily similar)**이라고 하며,
특히 행렬 $A \in M_n(C)$가 대각선행렬과 유니타리 닮음이면 A는 **유니타리 대각화가능(unitarily diagonalizable)**하다고 한다.

예제 6 두 행렬 A와 U를 각각 $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$라 하면 U는 유니타리 행렬이고, $U^*AU = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이므로 A는 유니타리 대각화가능하다. ■

● $A \in M_n(C)$가 유니타리 대각화가능하면 $U^*AU = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$인 유니타리 행렬 U가 존재한다. 즉 $AU = UD$이므로 $U = [U^{(1)} : U^{(2)} : \cdots : U^{(n)}]$라 하면

$$[AU^{(1)} : AU^{(2)} : \cdots : AU^{(n)}] = AU = UD = [\lambda_1 U^{(1)} : \lambda_2 U^{(2)} : \cdots : \lambda_n U^{(n)}]$$

● 즉, 유니타리 행렬 U의 각 열벡터 $U^{(i)}$는 A의 고유값 λ_i에 대응하는 크기 1인 고유벡터임을 알 수 있다.

예제 7 행렬 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$를 대각화하는 유니타리 행렬 U를 구하여라.

풀이

A의 고유값은 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$이고 이에 대응하는 고유벡터는 다음과 같다.

$$\lambda_1=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1+\mathrm{i} \end{bmatrix},\quad \lambda_2=3 \;\Rightarrow\; \mathrm{x}_2=\begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

이때, $\mathrm{u}_1=\frac{\mathrm{x}_1}{\|\mathrm{x}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}$, $\mathrm{u}_2=\frac{\mathrm{x}_2}{\|\mathrm{x}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$

이라 하고, $U=[\mathrm{u}_1\,\mathrm{u}_2]=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$이라 하면,

U는 유니타리 행렬이고

$$U^*AU=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ ■

Schur 정리

- 임의의 복소행렬을 삼각행렬로 바꾸어준다.

정리 8.8.4 [Schur 정리]

임의의 n차 정사각행렬은 자신의 고유값을 대각선 성분으로 갖는 상삼각행렬과 유니타리 닮음이다. 즉,

$$U^*AU=T=[t_{ij}]\in M_n(C),\ t_{ij}=0(i>j).\ (t_{ii}:\ A\text{의 고유값},\ U:\ \text{유니타리 행렬})$$

증명 행렬 A의 고유값을 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$이라 하고, 수학적 귀납법으로 증명하자.
먼저, $n=1$ 이면 $A=[\lambda_1]$ 이므로 정리는 성립한다. 이제, $n-1$차 이하인 경우에 성립한다고 가정하고 n차인 경우를 다음 단계로 보이도록 하자.

① x_1을 λ_1에 대응되는 정규화된 고유벡터라 하자.

② Gram-Schmidt 정규직교화과정으로부터 x_1을 포함하는 C^n의 정규직교기저가 존재한다. 이를 $S=\{\mathrm{x}_1, \mathrm{z}_2, \ldots, \mathrm{z}_n\}$이라 하자.

③ $U_0 \equiv [\mathrm{x}_1 \ : \mathrm{z}_2 : \ \cdots \ : \mathrm{z}_n]$이라 하면 S가 정규직교집합이므로 U_0는 유니타리 행렬이다. 또한, $A\mathrm{x}_1 = \lambda_1 \mathrm{x}_1$이므로 AU_0의 첫 번째 열은 $\lambda_1 \mathrm{x}_1$이다. 따라서 $U_0^*(AU_0)$는 다음과 같은 형태의 행렬이다.

$$U_0^* A U_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ O & A_1 \end{bmatrix}$$

여기서 $A_1 \in M_{n-1}(C)$이고 $|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)\,|\lambda I_{n-1} - A_1|$이므로 A_1의 고유값은 $\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$이다.

④ 귀납법의 가정에 의하여

$$\widehat{U_1}^* A_1 \widehat{U_1} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & * \\ 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

인 유니타리 행렬 $\widehat{U_1} \in M_{n-1}(C)$가 존재한다.

⑤ $$U_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & \widehat{U_1} \\ 0 & \end{bmatrix} \in M_n(C)$$

$$\Rightarrow (U_0 U_1)^* A (U_0 U_1) = U_1^* U_0^* A U_0 U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ 0 & \lambda_2 & & * \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

여기서 $U \equiv U_0 U_1$은 유니타리 행렬이다. 따라서 Schur 정리가 증명된다. ■

- [참고 동영상] http://youtu.be/lL0VdTStJDM
- 일반적으로, 모든 행렬이 유니타리 대각화가능한 것은 아니다.




[Issai Schur(1875–1941, Germany)]

정규행렬

정의 [정규행렬]

행렬 $A \in M_n(C)$가 다음을 만족하면 A를 **정규행렬(normal matrix)**이라고 한다.

$$AA^* = A^*A$$

예제 8 다음 행렬 A, B는 $AA^* = A^*A$, $BB^* = B^*B$를 만족하므로 정규행렬들의 예이다.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2+2i & i & 1-i \\ i & -2i & 1-3i \\ 1-i & 1-3i & -3+8i \end{bmatrix}$$ ■

예제 9 임의의 Hermitian 행렬 A는 $A = A^*$이므로 $AA^* = AA = A^*A$이다. 따라서 정규행렬이다. 또한 유니타리 행렬 B도 $BB^* = I_n = B^*B$ 이므로 정규행렬이다. ■

정규행렬과 동치인 명제

정리 8.8.5

행렬 $A \in M_n(C)$에 대하여 다음은 동치이다.

(1) A는 유니타리 대각화가능하다.
(2) A는 정규행렬이다.
(3) A는 n개의 정규직교인 고유벡터를 갖는다.

예제 10 행렬 A와 U가 각각 다음과 같은 경우 A가 정규행렬이고 U의 각 열은 A의 정규직교인 고유벡터임을 보여라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

풀이

$A=\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}=A^*$이므로 $AA^*=A^*A$이다. 따라서 A는 정규행렬이다.

$U=\begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\equiv[\mathrm{u}_1 : \mathrm{u}_2]$라 하면

$A\mathrm{u}_1=\begin{bmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=3\mathrm{u}_1,\ A\mathrm{u}_2=\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=1\mathrm{u}_2$

이므로 u_1, u_2는 A의 고유벡터이다. 또한, $\|\mathrm{u}_1\|=\|\mathrm{u}_2\|=1$이고 $\mathrm{u}_1\cdot\mathrm{u}_2=\mathrm{u}_2^*\mathrm{u}_1=0$이므로 u_1, u_2는 정규직교인 고유벡터이다. ■

예제 11 예제 1의 행렬 $A=\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$를 대각화하여라.

풀이

행렬 A는 Hermitian 행렬이고 위의 예제에서 고유값이 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$이다.

$\lambda_1=3$에 대응하는 일차독립인 고유벡터는 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$이므로 정규화하면

$\mathrm{u}_1=\frac{\mathrm{x}_1}{\|\mathrm{x}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$를 얻는다. 같은 방법으로 $\lambda_2=1$에 대응하는 고유벡터는

$\mathrm{x}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$이므로 정규화하면 $\mathrm{u}_2=\frac{\mathrm{x}_2}{\|\mathrm{x}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$를 얻는다.

그러므로 $U=[\mathrm{u}_1 : \mathrm{u}_2]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$로 택하면 $U^*AU=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이다. ■

참고

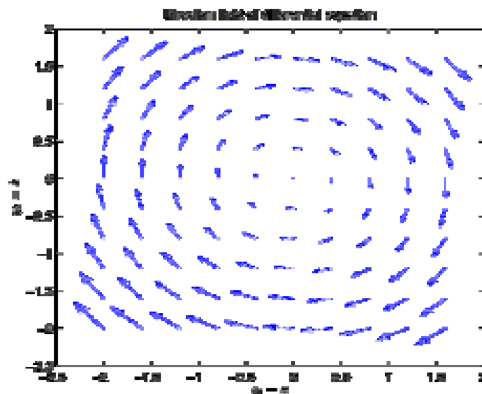
모든 행렬이 대각화가능한 것은 아니지만 Schur 정리를 이용하면 대각화가능하지 않은 행렬 A도 대각행렬과 유사한 행렬 J_A와 닮음(similar)이 되게 할 수 있다. 이러한 행렬 J_A를 A의 Jordan 표준형이라 한다. Jordan 표준형을 이용하면 모든 행렬을 대각행렬과 유사한 행렬 J_A로 바꾸어 행렬 A에 관한 계산 및 이론을 전개할 수 있다. 이는 10장에서 소개하기로 한다.

8.9 *선형연립미분방정식

- 참고 동영상: http://www.youtube.com/watch?v=c0y5DcNQ8gs
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-11-sec-8-1.html
  http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap8/Page83.htm
  http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap8/Page84.htm
  http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap8/Page85.htm
  http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap8/Page86.htm
  http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap8/Page87.htm



자연과학과 공학의 많은 문제들은 선형연립미분방정식을 푸는 수학적 문제로 바꿀 수 있다. 이 절에서는 행렬의 대각화를 이용하여 선형연립미분방정식을 푸는 방법을 소개한다.



증명은 논리로 가능하지만,
발견에 필요한 것은 **직관**이다
푸앵카레 1854-1912

"푸앵카레의 추측"
현대 카오스 이론의 기초를 마련



Chapter 8 연습문제

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm

문제 1 선형변환(선형연산자)가 $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$이고, 기저가 $\alpha = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$일 때, α에 관한 T의 행렬표현(변환행렬) $[T]_\alpha$를 구하여라.

문제 2 선형변환 $T : R^2 \to R^3$가 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 5x - y \\ 2x + 3y \end{bmatrix}$로 정의되고, $\alpha = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$, $\beta = \{\mathrm{v}_1{}', \mathrm{v}_2{}', \mathrm{v}_3{}'\}$를 각각 R^2, R^3의 순서기저로,
$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{v}_1{}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{v}_2{}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{v}_3{}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$일 때, 기저 α, β에 대한 T의 행렬표현 $[T]_\alpha^\beta$를 구하여라.

문제 3 선형변환(선형연산자) $T : R^2 \to R^2$가 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5x + 6y \\ -3x + 4y \end{bmatrix}$로 정의되고 순서기저가 $\alpha = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 기저 α에 대한 선형변환 T의 행렬표현 $[T]_\alpha$를 구하여라.

(2) 기저 β에서 α로의 전이행렬 $P = [I]_\beta^\alpha$를 구하여라.

(3) $P^{-1}[T]_\alpha P$를 구하여라.

문제 4 다음 행렬에서 대각화의 가능성을 판정하고 대각화가 가능한 행렬인 경우 대각화시키는 행렬 P와 그에 대응하는 대각선행렬 D를 구하여라.

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

문제 5 다음 행렬의 각 고유값의 대수적 중복도를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

문제 6 다음 대칭행렬에 대하여 직교대각화하는 직교행렬 P와 그때 $P^{-1}AP = D$인 대각행렬 D를 구하여라. [본 강좌의 대각화가능 부분 Sage 활용예제를 참조하시오.]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

문제 7 다음 행렬 A의 일차독립인 고유벡터들의 집합 S가 주어진 경우 A를 직교대각화하는 직교행렬 P와 $P^TAP = D$인 대각행렬 D를 구하여라.

(1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, $S = \{(-2, 2), (5, 5)\}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $S = \{(2, 1), (1, -2)\}$

문제 8 다음 행렬에 대하여 $q(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T A \mathrm{x}$를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 53 & 16 & 9 \\ -13 & 0 & -85 \\ 81 & -45 & 6 \end{bmatrix}, \ \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

문제 9 다음 이차형식을 $\mathrm{x}^T A \mathrm{x}$ 꼴로 나타내어라.

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 + xy - 2xz + 3yz$$

문제 10 다음에서 교차항을 소거하여라.

$$q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$$

문제 11 다음 방정식의 그래프의 개형을 그려라.

$$3x^2+2xy+3y^2-8=0$$

문제 12 이차곡면 $5x^2+6y^2+7z^2+4xy+4yz=1$의 교차항을 주축정리를 이용하여 소거하여라.

문제 13 주어진 행렬의 singular value를 구하여라.

$$A=[1\ \ 2\ \ 0]$$

문제 14 다음 주어진 행렬의 특이값분해(SVD)를 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

문제 15 행렬 A가 다음과 같은 SVD를 갖는 경우 $A^{\dagger}$를 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

문제 16 다음 주어진 행렬은 full column rank 행렬이다. 이를 이용하여 pseudo-inverse를 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\\2&1\end{bmatrix}$$

문제 17 두 벡터 $\mathrm{u}=(2i,\ 0,\ 3i)$, $\mathrm{v}=(2-i,\ 0,\ 1+3i)$에 대한 Euclid 내적 $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}$와 $\mathrm{v}\cdot\mathrm{u}$을 구하여라.

문제 18 Euclid 내적이 정의된 복소공간에서 벡터 u=$\begin{bmatrix} 62-85i \\ 9 \\ 66i \\ 20i+6 \\ 63+11i \end{bmatrix}$, v=$\begin{bmatrix} 31-55i \\ 13-61i \\ 21-63i \\ 11i \\ -71+9i \end{bmatrix}$의 노름 $\|u\|$와 $\|v\|$를 구하고 거리 $d(u, v)$를 구하여라.

문제 19 행렬 $A = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 의 고유값과 각 고유값에 대응하는 고유공간의 기저를 구하여라.

문제 20 다음 행렬은 복소수의 고유값을 가진다. 이를 이용하여 $A = PCP^{-1}$를 만족하는 가역 행렬 P와 행렬C를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

문제 21 다음 행렬 A에 켤레전치행렬 A^*를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 3+i & -2i \\ 1 & 6i \\ 3i & 1+i \\ 4 & -1+5i \end{bmatrix}$$

문제 22 다음 행렬 중 Hermitian 행렬을 모두 찾아라.

(a) $\begin{bmatrix} 3+i & 2 \\ 7 & 4-i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 0 & 2+i \\ -1 & -2+i & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 1 & -5i \\ 1 & 1-i & 4 \end{bmatrix}$

문제 23 다음 행렬이 유니타리 행렬인지를 판별하여라.

(a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 0 & 2+i \\ -1 & -2+i & 0 \end{bmatrix}$

문제 24 다음 행렬이 Hermitian이 되도록 $\times$를 채워라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 2-3i \\ \times & -3 & 1 \\ \times & \times & 2 \end{bmatrix}$$

문제 25 다음 주어진 행렬 A가 유니타리인 것을 보이고, A^{-1}를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i\sqrt{3}) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(i-\sqrt{3}) \end{bmatrix}$$

문제 P1 $\mathrm{v}_1 = (2, 0)$, $\mathrm{v}_2 = (0, 4)$라고 하고 $T : R^2 \to R^2$인 선형변환이라 하자. 만일 $T(\mathrm{v}_1) = \mathrm{v}_2$이고, $T(\mathrm{v}_2) = \mathrm{v}_1$이라면 선형변환 T의 표준행렬은 어떻게 되겠는가? 그리고 기저를 $\beta = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$로 가지는 경우 이 기저에 대한 T의 행렬표현 $[T]_\beta$는 어떻게 되겠는가?

문제 P2 다음 특성방정식을 갖는 행렬 A에 대해 생각해보자.

$$p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2(\lambda-4)^3$$

(1) A 행렬의 크기는 무엇인가?

(2) 만일 일차독립인 A의 고유벡터가 세 개 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$뿐이라면 이 행렬은 대각화가 가능한가?

(3) A의 각 고유값에 대한 고유공간의 가능한 최대차원은 무엇인가?

(4) 만일 A가 대각화가능하다면 6개의 일차독립인 고유벡터가 필요하다. 따라서 A의 각 고유값에 대하여 $(\lambda I - A)\mathrm{x} = 0$의 해공간의 차원은 각각의 대수적 중복도와 어떤 관계를 가져야 할 것인지에 대해 인터넷을 검색한 후 토론하여라.

문제 P3 (1) 어떤 3×3 크기 대칭행렬의 고유값과 그에 대응하는 고유벡터가 각각 아래와 같다면 그 행렬은 어떤 행렬인지 찾아라.

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 7 \qquad \mathrm{v}_1 = (0,\ 1,\ -1),\ \mathrm{v}_2 = (1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{v}_3 = (0,\ 1,\ 1)$$

(2) 다음의 고유값과 고유벡터를 가지는 3×3 크기의 행렬이 존재하는가?

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 7$$
$$\mathrm{v}_1 = (0,\ 1,\ -1),\ \mathrm{v}_2 = (1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{v}_3 = (1,\ 1,\ 1)$$

문제 P4 복소대칭행렬 $A = \begin{bmatrix} 12 & 6i \\ 6i & 10 \end{bmatrix}$의 고유값은 실수가 아니라는 것을 보여라.

문제 P5 행렬 $A \in M_n(C)$가 반-Hermitian 행렬이면 A의 모든 고유값은 순허수임을 보여라.

수학의 진보와 개선은,
국가의 번영을 좌우한다
나폴레옹 1769-1821
프랑스혁명 정신을 유럽 전역에 확산
현대 법전의 원전 나폴레옹 법전 편찬





[최윤식] 국내 최초의 수학박사(1956년, 서울대), 1926년 한국인 최초로 도쿄대학 수학과 졸업, 1945년 11월에 서울대 첫 번째 한국인 수학교수 임명된 김지정(도쿄대 수학과 졸업생)이 국대안 파동으로 북한 김일성 대학으로 간 직후 1946년 10월 서울대 수학과 초대 학과장으로 발령됨.
http://matrix.skku.ac.kr/KMS/KMS-NIMS-Choi-1958.htm

[홍임식] 한국인 최초의 여성 수학박사(1959년, 도쿄대학 수학과 이학박사)
http://www.youtube.com/watch?v=f7-c8m0Moz0



Chapter 9

일반벡터공간

9.1 벡터공간의 공리
9.2 내적공간; *푸리에 급수
9.3 동형사상(Isomorphism)
연습문제

벡터의 합과 스칼라배가 갖는 연산법칙은 이론에 그치지 않고 수학 체계의 일반적인 이론으로써 사회의 모든 분야에 적용될 수 있습니다. 예를 들어, 주위의 대상들을 벡터들로 생각하여 벡터들의 집합을 만든 후, 그 구성원 사이의 관계로부터 적당한 2개 연산(벡터 덧셈과 스칼라 곱셈 연산)을 줍니다. 이 2개의 연산이 만일 2개의 기본법칙과 8개의 연산법칙을 만족하면 벡터들의 집합이 앞에서 배운 수학적 체계인 벡터공간(또는 선형공간)이 되는 것이므로, 벡터공간의 모든 성질을 이용하여, 그 조직체에 대한 이론적 분석이 가능하여 응용범위가 방대해집니다.

이 장에서는 (일반) 벡터공간에 대한 정의를 주고 벡터공간의 일반이론을 설명하겠습니다.

선형대수학

9.1 벡터공간의 공리

- 참고 동영상: http://youtu.be/beXWYXYtAaI
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-14-sec-9-1.html



벡터의 개념은 2차원 또는 3차원 공간에서의 화살표에서 n차원 공간 R^n 안의 n-순서조(tuple)로 확장되어 왔다. 1장에서는 n차원 공간 R^n에서 덧셈과 스칼라 배라는 2개의 연산을 정의하고, 그것이 갖는 여러 가지 성질을 확인하였다. 이 절에서는 n차원 공간의 개념을 일반적인 벡터공간으로 확장한다.

벡터공간

정의 [벡터공간]

임의의 집합 $V(\neq \phi)$에 두 연산, 덧셈(vector addition, A) '+' 와 스칼라 배(scalar multiplication, SM) '·' 이 정의되어 있고, 임의의 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in V$와 $h, k \in R$에 대하여 2개의 기본법칙

A. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in V$
SM. $\mathbf{x} \in V,\ k \in R \Rightarrow k\mathbf{x} \in V$

과 다음의 8개의 연산법칙이 성립할 때, 집합 V가 주어진 2개의 연산과 함께 (실수집합 R 위에서) 벡터공간(vector space)을 이룬다고 하고, $(V, +, \cdot)$로 표기한다(혼동이 없는 경우는 간단히 벡터공간 V라고 쓴다). 이 벡터공간 V의 원소를 벡터(vector)라 한다.

A1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$
A2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
A3. 모든 $\mathbf{x} \in V$에 대하여 다음을 만족하는 원소 $\mathbf{0}$이 V에 단 하나 존재한다.
$\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$
A4. V의 각 원소 $\mathbf{x}$에 대하여 다음을 만족하는 $-\mathbf{x}$가 V에 유일하게 존재한다.
$\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$

SM1. $k(\mathbf{x}+\mathbf{y})=k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$
SM2. $(h+k)\mathbf{x}=h\mathbf{x}+k\mathbf{x}$
SM3. $(hk)\mathbf{x}=h(k\mathbf{x})=k(h\mathbf{x})$
SM4. $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$

위의 조건 A3를 만족시키는 0 을 영벡터, 조건 A4를 만족시키는 $-\mathrm{x}$를 x의 음벡터라 한다.

● 일반적으로 벡터공간을 만드는 2개의 연산이 매우 중요하다. 따라서 벡터공간을 표시할 때 $(V, +, \cdot)$의 형태로 주어진 연산과 함께 표기하는 것이 옳다.

예제 1 R^3의 벡터 $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3)$와 스칼라 $k \in R$에 대하여, 두 벡터의 합(vector sum) $\mathrm{x} + \mathrm{y}$와 k에 의한 x의 스칼라 배(scalar multiple) $k\mathrm{x}$를 다음과 같이 정의하면

(1) $\mathrm{x} + \mathrm{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
(2) $k\mathrm{x} = (kx_1, kx_2, kx_3)$

위의 두 연산과 함께 $(R^3, +, \cdot)$는 이 연산에 관한 실수집합 R 위의 벡터공간을 이룬다. ■

예제 2 R^n의 벡터

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

와 스칼라 $k \in R$에 대하여, 두 벡터의 합 $\mathrm{x} + \mathrm{y}$와 k에 의한 x의 스칼라 배 $k\mathrm{x}$를 각각 다음과 같이 정의하면,

$$(1)\ \mathrm{x} + \mathrm{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \qquad (2)\ k\mathrm{x} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$

R^n은 위의 두 연산과 함께 벡터공간을 이룬다. ■

정리 9.1.1

V를 벡터공간이라 할 때, 임의의 벡터 $\mathbf{x} \in V$와 스칼라 $k \in R$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$
(2) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
(3) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$
(4) $k\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff k = 0$ 또는 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

영벡터공간

정의

집합 $V = \{\mathbf{0}\}$에서 스칼라 $k \in R$에 대하여 덧셈과 스칼라 배를 각각

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

과 같이 정의하면 V는 이 연산에 관하여 벡터공간이다. 이 벡터공간을 영벡터공간(zero vector space)이라 한다.

예제 3 집합 $M_{m \times n}$을 모든 성분이 실수인 $m \times n$ 행렬 전체의 집합이라 하자. 즉

$$M_{m \times n} = \{A = [a_{ij}]_{m \times n} | a_{ij} \in R,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}.$$

이때 $m = n$이면 $M_{m \times n}$을 M_n으로 쓴다.

$M_{m \times n}$에서 덧셈과 스칼라 배를 각각 통상적인 행렬의 합과 스칼라 배로 정의하면 $M_{m \times n}$은 이 연산에 관하여 벡터공간 $(M_{m \times n}, +, \cdot)$을 이룬다.

이때 영벡터는 영행렬 O이고, 각 $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$에 대하여 음벡터는 $-A = [-a_{ij}]$이다. 이 경우에 벡터는 실수성분을 갖는 $m \times n$ 행렬이다. ■

예제 4 집합 $\mathcal{E}(R)$를 R에서 R로의 연속함수 전체의 집합이라 하자. 즉

$$\mathcal{E}(R) = \{f \mid f : R \to R \text{는 연속함수}\}$$

$f,\ g \in \mathcal{E}(R)$와 스칼라 $k \in R$에 대하여 덧셈과 스칼라 배를 각각

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (kf)(x) = kf(x)$$

와 같이 정의하면, $\mathcal{E}(R)$는 이 연산에 관하여 벡터공간 $(\mathcal{E}(R),\ +,\ \cdot\ )$을 이룬다.

이때 영벡터는 영함수 $0(x) = 0$이고 각 $f \in \mathcal{E}(R)$에 대하여 $-f$는 $(-f)(x) = -f(x)$로 정의된 함수이다.

이 경우 벡터공간 $\mathcal{E}(R)$ 안의 벡터란 R에서 R로의 연속함수이다. ■

예제 5 집합 P_n을 계수가 실수인 n차 이하의 다항식 전체의 집합이라 하자. 즉

$$P_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \mid a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n \in R\}$$

$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,\ q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n \in P_n$와 스칼라 $k \in R$에 대하여 덧셈과 스칼라배를 각각

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$
$$kp(t) = (ka_0) + (ka_1)t + \cdots + (ka_n)t^n$$

과 같이 정의하면, P_n은 이 연산에 관하여 벡터공간 $(P_n,\ +,\ \cdot\ )$을 이룬다. 이때 영벡터는 영다항식 $0(t) = 0 + 0t + \cdots + 0t^n$이고 각 $p(t) \in P_n$에 대하여 $-p(t)$는

$$-p(t) = -a_0 - a_1 t - \cdots - a_n t^n$$

으로 정의된 다항식이다. 이 벡터공간 P_n 안의 벡터는 실수계수를 갖는 n차 이하의 다항식이다. ■

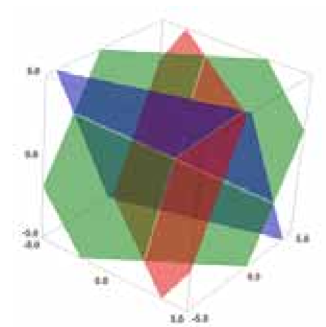
부분공간

정의

집합 V를 벡터공간이라 하고 $W(\neq \phi)$를 V의 부분집합이라 하자. 이때 벡터공간 V에서 정의된 덧셈과 스칼라 배에 관하여 W 자신이 벡터공간을 이룰 때, W를 V의 부분공간(subspace)이라 한다.

예제 6 $(V,\ +,\ \cdot\ )$가 벡터공간일 때, $\{0\}$과 V 자신은 V의 부분공간이다. ■

- 실제로 R^2의 부분공간은 $\{0\}$, R^2, 그리고 원점을 지나는 직선 이외에는 존재하지 않는다(3.4절 예제 3 참조).



부분공간인지 어떻게 판단하는가? (2-step 부분공간 판정법)

정리 9.1.2 [2-step 부분공간 판정법]

집합 $(V,\ +,\ \cdot\ )$는 벡터공간이고 $W(\neq \varnothing)$는 V의 부분집합이라 하자. 이때 W가 V의 부분공간일 필요충분조건은

(1) $\mathrm{x},\ \mathrm{y} \in W \Rightarrow \mathrm{x}+\mathrm{y} \in W$ (벡터 덧셈 $+$에 대하여 닫혀 있다.)
(2) $\mathrm{x} \in W,\ k \in R \Rightarrow k\mathrm{x} \in W$ (스칼라곱셈 $\cdot$ 에 대하여 닫혀 있다.)

예제 7

$W=\left\{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R\right\}$은 벡터공간 $(M_{2\times 3},\ +,\ \cdot\ )$의 부분공간임을 보여라.

풀이

$M_{2\times 3}$은 통상적인 연산들과 함께 벡터공간을 이루고, 임의의

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 & 0 \end{bmatrix} \in W,\ k \in R$$

에 대해 다음 연산에서 아래 두 조건을 만족한다.

(1) $\mathrm{x}+\mathrm{y} = \begin{bmatrix} 0 & a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 & 0 \end{bmatrix} \in W,$

(2) $k\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 & ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 & 0 \end{bmatrix} \in W$

따라서 **정리** 9.1.2에 의하여 $(W+,\ \cdot\ )$는 $(M_{2\times 3},\ +,\ \cdot\ )$의 부분공간이다. ■

예제 8

n차의 가역행렬들의 집합은 벡터공간 M_n의 부분공간이 아님을 보여라.

풀이

가역행렬 2개를 더하여 비가역행렬을 쉽게 만들 수 있다. 예를 들어,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ■

예제 9

V가 벡터공간일 때 $S=\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_t\} \subseteq V$에 대하여 집합

$$W = \{c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_t\mathrm{x}_t \mid c_1, c_2, \ldots, c_t \in R\}$$

은 V의 부분공간임을 보여라.

풀이

$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in W,\ k \in R$이라 하자. 그러면 $c_i, d_i \in R\ (i=1, 2, \ldots, t)$에 대하여

$$\mathrm{x} = c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_t\mathrm{x}_t,\ \mathrm{y} = d_1\mathrm{x}_1 + d_2\mathrm{x}_2 + \cdots + d_t\mathrm{x}_t$$

라고 쓸 수 있으므로

$$\mathrm{x}+\mathrm{y}=(c_1+d_1)\mathrm{x}_1+(c_2+d_2)\mathrm{x}_2+\cdots+(c_t+d_t)\mathrm{x}_t,$$
$$k\mathrm{x}=(kc_1)\mathrm{x}_1+(kc_2)\mathrm{x}_2+\cdots+(kc_t)\mathrm{x}_t.$$

$$\therefore\ \mathrm{x}+\mathrm{y}\in W,\quad k\mathrm{x}\in W$$

따라서 W는 V의 부분공간이다. ■

일차독립과 일차종속

정의 [일차독립과 일차종속]

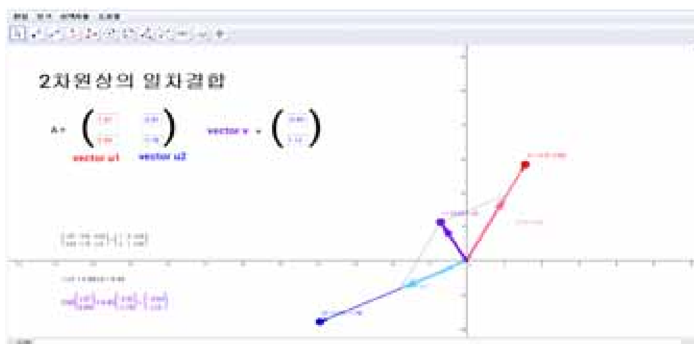
벡터공간 V 안의 부분집합 $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$이 다음 조건을 만족하면 **일차독립(linearly independent)**이라 한다.

$$c_1\mathrm{v}_1+c_2\mathrm{v}_2+\cdots+c_n\mathrm{v}_n=0 \ \Rightarrow\ c_1=c_2=\cdots=c_n=0$$

그리고 일차독립이 아닌 경우를 **일차종속**이라고 한다. 즉, 일차종속이란 전부는 영이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_n$에 대하여 $c_1\mathrm{v}_1+c_2\mathrm{v}_2+\cdots+c_n\mathrm{v}_n=0$이 됨을 의미한다.

참고 2차원상의 일차결합 - 일차종속(컴퓨터 시뮬레이션)

- http://www.geogebratube.org/student/m57551



예제 10 $E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$이라 하면,

$$c_1E_{11}+c_2E_{12}+c_3E_{21}+c_4E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=c_4=0$$

이므로 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$는 M_2에서 일차독립이다. ■

예제 11 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0&-1\\2&2\end{bmatrix}$일 때 $A=B+C$이므로 $\{A, B, C\}$는 M_2에서 일차종속이다. ■

예제 12 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$은 P_n에서 일차독립인 집합이다. ■

예제 13 $\{2-x+x^2, 2x+x^3, 4-4x+x^2\}$은 P_3의 부분집합으로

$$4-4x+x^2=2(2-x+x^2)-(2x+x^2)$$

이므로 일차종속이다. ■

기저

정의 [기저와 차원]

벡터공간 V의 부분집합 $\alpha(\neq\phi)$가 다음 두 조건을 만족하면 α를 V의 **기저(basis)**라 한다.

(1) $\text{span}(\alpha)=V$
(2) α는 일차독립이다.

이때 기저 α 안의 벡터들의 개수 $|\alpha|$를 V의 **차원(dimension)**이라 하며, $\dim(V)$로 쓴다.

예제 14

예제 10에 소개된 $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$은 M_2의 기저가 된다. 따라서 $\dim(M_{2\times 2}) = 4$이다. 또 예제 12에서 본 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$은 P_n의 기저이다. 따라서 $\dim(P_n) = n+1$이 된다. 이 둘은 모두 좌표계의 표준기저와 유사한 역할을 하므로, 각각 M_2와 P_n의 **표준기저**라 한다. ■

예제 15

$\alpha = \{1+x, -1+x, x^2\}$은 P_2의 기저임을 보여라.



$$a(1+x) + b(-1+x) + cx^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b) + (a+b)x + cx^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a-b = 0,\ a+b = 0,\ c = 0$$

그러므로 $a = b = c = 0$이므로, α는 일차독립이다.
다음으로 임의의 $A + Bx + Cx^2 \in P_2$에 대하여

$$A + Bx + Cx^2 = a(1+x) + b(-1+x) + cx^2$$

을 만족하는 a, b, c의 존재성은 연립방정식

$$\begin{cases} a-b &= A \\ a+b &= B \\ \quad c &= C \end{cases} \quad \text{즉,} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

의 계수행렬이 가역행렬이므로 보장된다. 따라서 α는 P_2를 생성한다. 그러므로 α는 P_2의 기저이다. ■

연속함수의 일차독립성: Wronskian

정리 9.1.3 [Wronski의 Test]

만약 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $n-1$번 미분 가능한 함수이고, Wronskian $W(x_0)$가 0이 아니게 하는 $x_0 \in (-\infty, \infty)$가 하나라도 존재하면, 이 함수들은 일차독립인 함수(벡터)들이 된다.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1{}'(x_0) & \cdots & f_n{}'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

반대로 만일 모든 영역에서 $W=0$이면 이 함수들은 일차종속이다.



예제 16 **정리** 9.1.3을 이용하여 $f_1(x)=1$, $f_2(x)=e^x$, $f_3(x)=e^{2x}$일 때, 세 함수가 일차독립임을 보여라.

풀이

어떤 (사실은 모든) x에 대하여는 $W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0$이므로 이 세 함수들의 집합은 일차독립이다. □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

```
var('x')
W=wronskian(1, e^x, e^(2*x))   # wronskian(f1(x), f2(x), f3(x))
print W
```

```
2*e^(3*x)
```

■



예제 17 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$ 일 때, 두 함수가 일차독립임을 보여라.

풀이

어떤 x_0에 대하여는 $W(x_0) = \begin{vmatrix} x_0 & \sin x_0 \\ 1 & \cos x_0 \end{vmatrix} = x_0 \cos x_0 - \sin x_0 \neq 0$이므로 이 두 함수는 일차독립이다. ■

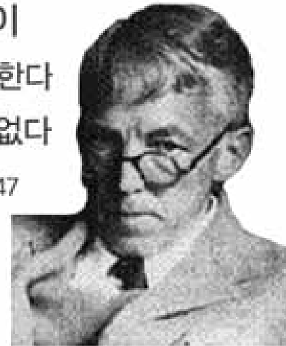


예제 18 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 3x$ 일 때, 두 함수가 일차종속임을 보여라.

풀이

모든 x에 대하여 $W(x) = \begin{vmatrix} x & 3x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$이므로 두 함수는 일차종속이다. ■

화가가 물감을, 시인이 단어를 다루듯이
수학자의 아이디어는 **조화미**를 추구한다
그렇지 않은 수학은 세상에 영속할 수 없다
하디 1877–1947



"하디–바인베르크 원리"
순수수학을 추구하였으나 그의 연구성과는
응용수학의 발달에 큰 역할을 하였다

9.2 내적공간; *푸리에 급수

- 참고 동영상: http://youtu.be/nlkYF-uvFdA
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-14-sec-9-2.html



이 절에서는 R^n상의 유클리드 내적(dot product)을 일반화하여 일반적인 벡터공간에서 길이, 거리, 직교성에 대한 개념을 소개할 것이다.

실수범위에서의 내적과 내적공간



[내적과 내적공간]

실벡터공간 V상의 내적(inner product)은 V상의 한 쌍의 벡터 u, v에 대하여 스칼라 $<\mathrm{u}, \mathrm{v}>$를 대응시키는 함수로 다음을 만족한다.

(즉 $< \ , \ > : V \times V \rightarrow R$와 같이 정의된 함수 $< \ , \ >$가 다음을 만족한다.)

(1) $<\mathrm{u}, \mathrm{v} \geqq <\mathrm{v}, \mathrm{u}>$
(2) $<\mathrm{u}+\mathrm{v}, \mathrm{w} \geqq <\mathrm{u}, \mathrm{w}>+<\mathrm{v}, \mathrm{w}>$
(3) $<c\mathrm{u}, \mathrm{v} \geqq c<\mathrm{u}, \mathrm{v}>$
(4) $<\mathrm{u}, \mathrm{u}> \geq 0$; $<\mathrm{u}, \mathrm{u}> = 0 \Leftrightarrow \mathrm{u}=0$

내적공간(inner product space)은 벡터공간 V에 특정한 내적 $<\mathrm{u}, \mathrm{v}>$가 정의된 벡터공간이다.

예제 1

유클리드 내적, 즉 dot product는 단지 실수의 n-순서조의 벡터공간 R^n상에서의 내적의 한 예이다. R^n상에서 다른 내적이 어떻게 정의되는가 보기 위해서 $A \in M_n(R)$인 행렬을 생각하자. R^n의 열벡터 u와 v에 대하여 $<\mathrm{u}, \mathrm{v}>$를 $<\mathrm{u}, \mathrm{v}> = \mathrm{v}^T A \mathrm{u}$로 정의하자. 그러면 이렇게 정의된 함수가 내적이 되기 위한 행렬 A의 조건은 어떻게 되는지 살펴보자.



$<\mathrm{u}, \mathrm{v}> = \mathrm{v}^T A \mathrm{u}$가 내적이 되려면 조건 (1)~(4)를 모두 만족해야 한다. 우선 조건 (2), (3)을 보이자.

$$<\mathrm{u}+\mathrm{v}, \mathrm{w}> = \mathrm{w}^T A(\mathrm{u}+\mathrm{v})$$

$$= w^TAu + w^TAv = <u, w> + <v, w>,$$

$$<cu, v> = v^TA(cu) = cv^TAu = c<u, v>.$$

이제 조건 (1)이 언제 성립하는지 확인해보자. v^TAu는 실수(1×1 행렬)이므로,

$$(v^TAu)^T = v^TAu$$

이다.

즉 $<u, v \geq v^TAu = (v^TAu)^T = u^TA^Tv = u^TAv = < v, u >$이려면 $A = A^T$,
즉 A는 대칭행렬이어야 한다.

따라서 내적 $<u, v> = v^TAu$는 행렬 A가 대칭행렬인 경우 조건 (1)을 만족한다.

마지막으로 조건 (4)를 확인하자. $n \times n$ 대칭행렬 A는 모든 영이 아닌 u에 대해서 $u^TAu > 0$이어야 하는데, 이 경우 A가 양의 정부호(positive definite)라 한다. 즉, A가 양의 정부호이면 $<u, v> = v^TAu$는 내적의 조건 (4)를 만족한다.

그러므로 이상을 정리하면 만일 $n \times n$ 행렬 A가 대칭이고 양의 정부호이면, 그때 $<u, v> = v^TAu$는 R^n에서의 내적이라는 것을 알 수 있다. 이미 알고 있는 유클리드 내적 $u \cdot v = v^Tu = v^TIu$는 $A = I_n$(대칭이고 양의 정부호)인 내적의 특수한 경우로 생각할 수 있다. ■

- 영벡터가 아닌 모든 u에 대해서 $u^TAu > 0$이려면 A의 모든 고유값이 양수이면 된다(역도 성립한다).

예제 2

2×2 대칭행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$와 R^2상의 벡터 $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$라 할 때,

$$<u, v> = v^TAu = 3v_1u_1 + 2v_2u_1 + 2v_1u_2 + 4v_2u_2$$

는 R^2상의 내적의 조건 (1), (2), (3)을 만족한다. 이제 A가 양의 정부호 행렬임을 보이자. $w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$라면, $<w, w> = w^TAw = 3x^2 + 4xy + 4y^2 = (x+2y)^2 + 2x^2$이다. 그러므로 $w^TAw \geq 0$이고

$$\mathrm{w}^T A\mathrm{w} = 0 \Leftrightarrow x+2y=0=x \Leftrightarrow x=y=0$$

이다. 따라서 대칭행렬 A는 양의 정부호이고, $<\mathrm{u}, \mathrm{v}> = \mathrm{v}^T A\mathrm{u}$는 R^2상의 내적이 된다.

만일 $\mathrm{u}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$이고, $\mathrm{v}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$라면, 그때 $\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}=7$이다. 반면에

$$<\mathrm{u}, \mathrm{v}> = [1\ 4]\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = 51$$

이다. 따라서 내적 $<\mathrm{u}, \mathrm{v}> = \mathrm{v}^T A\mathrm{u}$는 R^2상에서의 유클리드 내적과는 같지 않음을 볼 수 있다. ■

벡터의 길이(norm)와 두 벡터 사이의 각

 [벡터의 길이(norm)와 두 벡터 사이의 각]

벡터공간 V상에 임의의 내적 $<\mathrm{u}, \mathrm{v}>$가 주어질 때, (내적의 관점에서) 벡터 u의 길이(norm)는 다음과 같다.

$$\|\mathrm{u}\| = \sqrt{<\mathrm{u}, \mathrm{u}>}$$

벡터 u와 v 사이의 각(angle) θ도 (내적을 이용하여) 다음과 같이 정의한다.

$$\cos\theta = \frac{<\mathrm{u}, \mathrm{v}>}{\|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|} \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

특히, 벡터 u, v가 $<\mathrm{u}, \mathrm{v} \geqq 0$이면 직교한다고 한다.

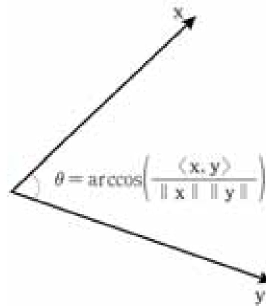
- 예를 들어, $\mathrm{u}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$의 길이는 예제 2에서 주어진 내적을 이용하면

$$\|\mathrm{u}\|^2 = <\mathrm{u}, \mathrm{u}> = \mathrm{u}^T A\mathrm{u} = [3\ \ 1]\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = 43$$

이다. 따라서 $\|u\| = \sqrt{43}$ 이다. 반면에 $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$의 유클리드 길이는

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = u^T u = \sqrt{10}$$

이다.



- 임의의 내적공간에 대해서도 삼각부등식 $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$은 성립한다.
- Gram-Schmidt 정규직교화 방법을 이용하여 내적공간 V에 대한 기저 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$을 정규직교기저 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$으로 바꿀 수 있다.

복소벡터공간상의 내적

정의

복소벡터공간 V의 임의의 벡터 u, v, w와 스칼라 $c \in C$에 대하여 다음 조건을 만족하는 $V \times V$에서 C로의 함수 $<, >$를 V의 **내적(또는 Hermitian 내적)**이라 한다.

(1) $<u, v> = \overline{<v, u>}$
(2) $<u+v, w> = <u, w> + <v, w>$
(3) $<cu, v> = c<u, v>$
(4) $<v, v> \geq 0$, 특히 $<v, v> = 0 \Leftrightarrow v = 0$

- 내적을 갖는 복소벡터공간을 복소내적공간(complex inner product space) 또는 유니타리공간(unitary space)이라 한다. 또한 영벡터가 아닌 복소벡터 u, v에

대하여 $< \mathrm{u}, \mathrm{v} > = 0$이면 u와 v는 직교한다(orthogonal)고 한다.

- 복소벡터공간 V에 대하여 내적공간의 정의로부터 다음 성질을 바로 얻을 수 있다.

(1) $< 0, \mathrm{v} > \ = 0 = \ < \mathrm{v}, 0 >$

(2) $< \mathrm{u}, \mathrm{v} + \mathrm{w} > \ = \ < \mathrm{u}, \mathrm{v} > + < \mathrm{u}, \mathrm{w} >$

(3) $< \mathrm{u}, c\mathrm{v} > \ = \bar{c} < \mathrm{u}, \mathrm{v} >, \quad c \in C \quad (\because \ < \mathrm{u}, c\mathrm{v} > \ = (c\mathrm{v})^{*} A\mathrm{u} = \bar{c}\, \mathrm{v}^{*} A\mathrm{u} = \bar{c} < \mathrm{u}, \mathrm{v} >)$

예제 3 $\mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$과 $\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$을 C^n의 벡터라 하면 유클리드 내적 $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = \overline{v_1} u_1 + \overline{v_2} u_2 + \cdots + \overline{v_n} u_n$은 내적의 공리 (1)~(4)를 모두 만족한다. ■

예제 4 $\mathcal{E}([a, b], C)$를 구간 $[a, b]$에서 복소수 C로의 연속함수 전체의 집합이라 하자. 만일 $f(x), g(x) \in \mathcal{E}([a, b], C)$에 대하여 함수의 덧셈과 스칼라배를 각각 다음과 같이 정의하면 $\mathcal{E}([a, b], C)$는 이 연산에 관하여 복소벡터공간을 이룬다.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x), \quad c \in C$$

이때 벡터는 $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$와 같은 형태의 함수이고, $f_1(x)$, $f_2(x)$는 $[a, b]$에서 실수 R로의 연속함수이다. 이제 $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{E}([a, b], C)$에 대하여 내적을 다음과 같이 정의하자.

$$< f(x), g(x) \geq \int_a^b \overline{g(x)} f(x)\, dx$$

그러면 $\mathcal{E}([a, b], C)$는 복소내적공간이다.

위의 함수가 내적의 공리 중 (1)~(3)을 만족하는 것은 연습문제로 남기고, 여기서는 (4)만을 보이도록 한다.

$$< f(x), f(x) \geq \int_a^b \overline{f(x)} f(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

이고, $|f(x)|^2 \geq 0$이므로 $< f(x), f(x) > \geq 0$이다. 특히

$$< f(x), f(x) > = \int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow |f(x)|^2 = 0$$

즉, $f(x) = 0\ (a \le x \le b)$이고, 역으로 f가 영함수이면 $< f(x), f(x) > = 0$이 됨은 분명하다. ■

복소내적공간의 노름과 거리

정의 [복소내적공간의 노름과 거리]

복소내적공간 V에서 벡터 u 의 노름(norm)과 V의 두 벡터 u , v 사이의 거리(distance)를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\|u\| = < u, u >^{\frac{1}{2}}, \ d(u, v) = \|u - v\|$$

예제 5 벡터 $u = (2i, 0, 1+3i)$, $v = (2-i, 0, 1+3i)$의 유클리드 내적과 유클리드 거리를 구하여라.

풀이

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \overline{(2-i)}\ (2i) + 0 \cdot 0 + \overline{(1+3i)}(1+3i) \\ &= (2+i)(2i) + 0 + (1-3i)(1+3i) \\ &= 4i + 2i^2 + 1 - 9i^2 = 8 + 4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| \\ &= \sqrt{|2i-(2-i)|^2 + |0-0|^2 + |(1+3i)-(1+3i)|^2} \\ &= \sqrt{|-2+3i|^2 + 0 + 0} \\ &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

■

예제 6 예제 4에서 $[a, b] = [0, \pi]$이고 $f(x) = e^{imx}$일 때, 함수 $f(x)$의 노름(norm)을 구하여라.

풀이

$$\|f\| = \langle f(x), f(x) \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\pi} \overline{e^{imx}} e^{imx} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_0^{\pi} e^{-imx} e^{imx} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\pi} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \quad ■$$

코시-슈바르츠 부등식과 삼각부등식

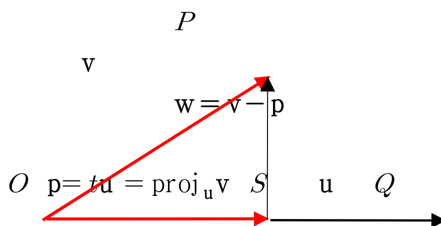
정리 9.2.1

복소내적공간 V 의 임의의 벡터 u, v에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $|\langle u, v \rangle| \le \|u\|\|v\|$ (코시-슈바르츠 부등식)
(2) $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ (삼각부등식)

증명 (1)번만 증명한다.

$u=0$이면 $|\langle u, v \rangle| = 0 = \|u\| \|v\|$ 이므로 식 (1)이 성립한다. 이제 $u \ne 0$이라 하고 $p = \mathrm{proj}_{\langle u \rangle} v$, $w = v - p$라 놓자. 그러면, $\langle w, p \rangle = 0$이고 $p = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$이므로 다음이 성립한다.



$$0 \le \langle w, w \rangle = \langle w, v-p \rangle = \langle w, v \rangle - \langle w, p \rangle$$
$$= \langle w, v \rangle = \langle v-p, v \rangle = \langle v, v \rangle - \langle p, v \rangle$$
$$= \|v\|^2 - t\langle u, v \rangle = \|v\|^2 - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \langle u, v \rangle$$

따라서, $\|v\|^2 \|u\|^2 \ge \overline{\langle u, v \rangle} \langle u, v \rangle = |\langle u, v \rangle|^2$이므로 식 (1)이 성립한다. ■

예제 7 두 벡터 $\mathrm{u} = (1+i,\ 0,\ 2-i)$, $\mathrm{v} = (2,\ 3i,\ i)$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) 유클리드 내적 $<\mathrm{u}, \mathrm{v}>$, $\|\mathrm{u}\|, \|\mathrm{v}\|, \|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|$를 구하여라.
(2) u와 v가 일차독립임을 보여라.


풀이

(1) $<\mathrm{u}, \mathrm{v} \geqq (2)(1+i) + 0 + (\bar{i})(2-i) = 2+2i-2i+i^2 = 1$

$$\|\mathrm{u}\| = \sqrt{|1+i|^2 + |2-i|^2} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$$

$$\|\mathrm{v}\| = \sqrt{|2|^2 + |3i|^2 + |i|^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\| = \|(3+i, 3i, 2)\| = \sqrt{|3+i|^2 + |3i|^2 + |2|^2}$$

$$= \sqrt{3^2+1^2+3^2+2^2} = \sqrt{23}$$

(2) 임의의 스칼라 $\alpha, \beta \in C$에 대하여 $\alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{v} = 0$이라 하면

$$\alpha(1+i,\ 0,\ 2-i) + \beta(2,\ 3i,\ i) = (0,\ 0,\ 0)$$

$$\Rightarrow\ (\alpha+2\beta) + \alpha i = 0,\ 3\beta i = 0,\ 2\alpha + (\beta-\alpha)i = 0$$

이므로 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다. 따라서 u와 v는 일차독립이다. ■

예제 8 두 벡터 $\mathrm{u} = (1+i,\ 0,\ 2-i)$, $\mathrm{v} = (2,\ 3i,\ i)$에 대하여 코시-슈바르츠 부등식과 삼각부등식이 성립함을 확인하여라.


풀이

$|<\mathrm{u}, \mathrm{v}>| = 1$ 이고 $\|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\| = \sqrt{98} > 1$이므로, 코시-슈바르츠 부등식이 성립한다.
또한 $\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\| = \sqrt{23} \leq \sqrt{7} + \sqrt{14} = \|\mathrm{u}\| + \|\mathrm{v}\|$이므로 삼각부등식이 성립한다. ■

예제 9 **[C^n과 $\mathcal{E}([a, b], C)$에서의 코시-슈바르츠 부등식]**

(1) 유클리드 내적이 정의되어 있는 복소내적공간 C^n의 두 벡터

$$\mathrm{u} = (a_1,\ \ldots,\ a_n),\ \mathrm{v} = (b_1,\ \ldots,\ b_n)$$

에 대하여

$$|<\mathrm{u}, \mathrm{v}>| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathrm{u}\|\,\|\mathrm{v}\|$$

이므로 코시-슈바르츠 부등식이 성립한다. ■

(2) $\mathrm{u} = f(x)$, $\mathrm{v} = g(x) \in \mathscr{E}([a, b], C)$ 라 하고 예제 4 에서와 같이 내적을 정의하면

$$|<\mathrm{u}, \mathrm{v}>| = \left| \int_a^b \overline{g(x)} f(x)\, dx \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|\mathrm{u}\| \|\mathrm{v}\|$$

이므로 코시-슈바르츠 부등식이 성립한다. ■

예제 10

[삼각부등식] 예제 3 과 예제 4 와 같이 내적을 각각 정의하면,

(1) $\mathrm{u} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathrm{v} = (b_1, \ldots, b_n) \in C^n$ 에 대하여 삼각부등식이 성립한다. 즉

$$\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|\mathrm{u}\| + \|\mathrm{v}\|$$ ■

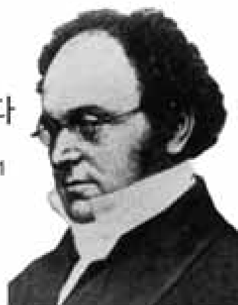
(2) $\mathrm{u} = f(x)$, $\mathrm{v} = g(x) \in \mathscr{E}([a, b], C)$ 에 대하여 삼각부등식이 성립한다. 즉

$$\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\| = \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|\mathrm{u}\| + \|\mathrm{v}\|$$ ■

삼각법은 끊임없는 파동을 일으키는

크기에 대한 과학 을 포함한다

드 모르간 1806–1871



현대논리학을 다진 학자

최초로 **수학적귀납법** 개념을 사용하였다

9.3 동형사상(Isomorphism)

- 참고 동영상: http://youtu.be/Y2lhCID0XS8
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-14-sec-9-3.html



R^n 상의 선형변환의 정의를 일반적인 벡터공간 V로 확장하여 다음과 같이 일반적인 선형변환을 정의하자. 이 선형변환 중 전단사인 선형변환들은 특별한 의미를 갖는다.

정의

$T: V \to W$가 벡터공간 V에서 W로의 함수로 다음 조건을 만족하면 T를 V에서 W로의 선형변환(linear transformation)이라고 정의한다.

(1) $T(c\mathrm{u}) = cT(\mathrm{u})$
(2) $T(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v})$

단, c는 임의의 스칼라이고, u, v는 벡터공간 V 안의 임의의 벡터이다.

- 만일 $V = W$이면 위의 선형변환 T를 선형연산자(linear operator)라 한다.

정리 9.3.1

만일 $T: V \to W$가 선형변환이면

(1) $T(0) = 0$
(2) $T(-\mathrm{u}) = -T(\mathrm{u})$
(3) $T(\mathrm{u}-\mathrm{v}) = T(\mathrm{u}) - T(\mathrm{v})$

예제 1 $T: V \to W$가 모든 $\mathrm{v} \in V$에 대하여 $T(\mathrm{v}) = 0$으로 정의하면 이는 선형변환이다. 이것을 영변환(zero transformation)이라 한다. 또한 $T: V \to V$가 모든 $\mathrm{v} \in V$에 대하여 $T(\mathrm{v}) = \mathrm{v}$로 정의하면 이 또한 선형변환, 즉 선형연산자이고 이것을 항등연산자(identity operator)라 한다. ■

예제 2 $T : V \to V$가 $T(\mathrm{v}) = k\mathrm{v}$ (k는 스칼라)로 정의하면 T는 선형연산자이다. 즉 아래의 두 성질이 만족한다.

(1) $T(c\mathrm{u}) = k(c\mathrm{u}) = c(k\mathrm{u}) = cT(\mathrm{u})$
(2) $T(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = k(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = k\mathrm{u}+k\mathrm{v} = T(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v})$

이 때 $0 < k < 1$이면 T는 수축(contraction)이라 하고, $k > 1$이면 팽창(dilation)이라 한다. ■

예제 3 $\mathcal{E}(R)$이 R에서 정의된 모든 연속함수들로 이루어진 벡터공간이고 V는 미분 가능한 함수들로 이루어진 $\mathcal{E}(R)$의 부분공간이라 할 때 $D : V \to V$를 $D(f) = f'$으로 정의하면, D는 선형변환이고 이를 미분연산자라 한다. ■

예제 4 집합 V가 1차 미분 가능한 함수들로 이루어진 $\mathcal{E}(R)$의 부분공간이라 할 때 $J : V \to W$를 $J(f) = \int_0^x f(t)\,dt$라 하면 J는 선형변환이다. ■

핵과 치역

정의 [핵과 치역]

선형변환 $T : V \to W$에 대하여

$$\ker T = \{\mathrm{v} \in V \mid T(\mathrm{v}) = 0\},\ \ \mathrm{Im}\, T = \{T(\mathrm{v}) \in W \mid \mathrm{v} \in V\}$$

를 각각 T의 **핵(kernel), 치역(range)**이라 한다.

예제 5 $T : V \to W$가 영변환이면, $\ker T = V$이고, $\mathrm{Im}\, T = \{0\}$이다. ■

예제 6 $T : V \to V$가 항등연산자이면, $\ker T = \{0\}$, $\mathrm{Im}\, T = V$이다. ■

예제 7 예제 3에서 정의된 $D(f) = f'$인 미분연산자 D에 대하여 $\ker D$는 "$(-\infty, \infty)$ 위에 정의된 상수함수들의 집합" 이고, $\text{Im}\, T$는 "연속함수들의 집합, 즉 $Cont(-\infty, \infty)$" 이다. ■

핵과 치역의 기본 성질

정리 9.3.2

$T : V \to W$가 선형변환이면 $\ker T$와 $\text{Im}\, T$는 각각 V, W의 부분공간이다.

정리 9.3.3

$T : V \to W$가 선형변환이면 다음 두 명제는 동치명제이다.

(1) T가 단사함수(일대일 함수)이다.
(2) $\ker T = \{\mathbf{0}\}$

동형사상

정의

선형변환 $T : V \to W$가 단사이고 전사이면 이를 동형사상(isomorphism)이라 하고, 이때 V는 W와 동형이라 한다. 표기는 $V \cong W$ 라 한다.

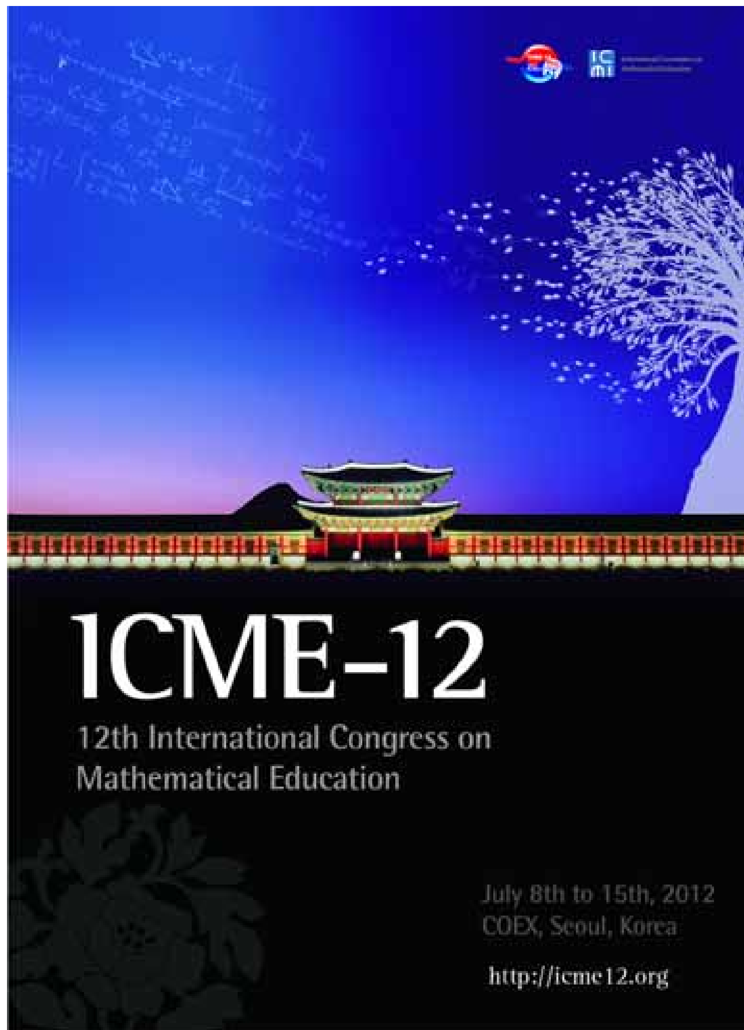
정리 9.3.4

모든 n차원 실벡터공간은 R^n과 동형이다.

- (실수공간 R 위에서 정의된) 모든 n차원 실벡터공간은 R^n과 동형이고, (복소공간 C 위에서 정의된) 모든 n차원 복소벡터공간은 C^n과 동형이다.

예제 8 위의 정리로부터 다음과 같은 동형관계를 확인할 수 있다.

$$P_{n-1} \cong R^n, \quad M_{m \times n} \cong R^{m \times n}$$ ■



[제12차 국제수학교육대회] http://www.icme12.org/
http://matrix.skku.ac.kr/2012-Album/ICME-HPM.html

Chapter 9 연습문제

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm

문제 1 집합 R^2 또는 M_2상의 덧셈과 스칼라배를 다음과 같이 정의할 때, R^2 또는 M_2가 주어진 연산에 관하여 벡터공간인가?

(1) $(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$, $\quad k(a_1, a_2)=(a_1, 0)$

(2) $(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1-b_1, a_2-b_2)$, $\quad k(a_1, a_2)=(ka_1, ka_2)$

(3) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2b_2 \\ a_3b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix}$, $\quad k\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_1 & ka_2 \\ ka_3 & ka_4 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix}$, $\quad k\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_1 & ka_2 \\ ka_3 & ka_4 \end{bmatrix}$

문제 2 다음 중 M_2의 부분공간을 찾아라.

(1) $\left\{\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \middle| a\in R\right\}$

(2) $\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b\in R\right\}$

(3) $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a+d=0\right\}$

(4) $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a+d=1\right\}$

문제 3 P_2의 벡터 $p(t)=2t^2+3t+1$을 벡터 $p_1(t)=t^2+t-1$, $p_2(t)=t^2+t+1$, $p_3(t)=t^2+2t+4$의 일차결합으로 나타내어라.

문제 4 다음에서 주어진 벡터들이 주어진 공간에서 일차독립인지, 일차종속인지를 결정

하여라.

(1) $R^3 : \mathrm{x}_1 = (12,\ -12,\ 43,\ 1)$, $\mathrm{x}_2 = (0,\ 12,\ -3,\ -2)$,
$\mathrm{x}_3 = (12,\ -12,\ 5,\ 0)$,
$\mathrm{x}_4 = (-2,\ 3,\ 1,\ 4)$

(2) $M_2 : \mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $P_3 :\ p_1(t) = t^3 + 4t^2 - 2t + 3,\quad p_2(t) = t^3 + 6t^2 - t + 4,$
$p_3(t) = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7$

문제 5 유클리드 내적이 정의되어 있는 복소내적공간 C^3에서 다음을 답하여라.
$\mathrm{u} = (i,\ i,\ i),\ \mathrm{v} = (i,\ -i,\ i)$

(1) $<\mathrm{u},\ \mathrm{v}>$를 구하여라.

(2) $\|\mathrm{u}\|,\ \|\mathrm{v}\|,\ \|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|$를 구하여라.

(3) 코시-슈바르츠 부등식을 확인하여라.

(4) 삼각부등식을 확인하여라.

문제 6 R^2에서 $<\mathrm{u},\ \mathrm{v}> = 6u_1v_1 - 2u_2v_1 - 2u_1v_2 + 3u_2v_2$로 정의된 내적에 대하여 다음을 구하여라. (단, $\mathrm{u} = < u_1,\ u_2 >,\ \mathrm{v} = (v_1,\ v_2)$)

(1) $<\mathrm{u},\ \mathrm{v}> = \mathrm{v}^T A\mathrm{u}$를 만족하는 2×2 대칭행렬 A

(2) $\mathrm{u} = (1,\ -1)$의 크기 $\|\mathrm{u}\|$

(3) $\mathrm{v} = (4,\ 3)$의 크기 $\|\mathrm{v}\|$

(4) $\dfrac{<\mathrm{u},\ \mathrm{v}>}{\|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|} = \cos\theta$인 θ

문제 7 다음 중 선형변환인 것과 아닌 것을 구별하고 선형변환이 아닌 경우 그 이유를 서술하여라.

(1) $T: P_3 \to P_4$, $T(p(x)) = xp(x)$

(2) $T: M_n \to M_n$, $T(A) = A^T$

(3) $T: \mathcal{E}[a, b] \to R$, $T(f(x)) = \int_a^b f(x)\,dx$

(4) $T: M_n \to R$, $T(A) = \mathrm{tr}(A)$

(5) $T: P_3 \to P_6$, $T(p(x)) = p(x)^2$

(6) $T: V \to R$, $T(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|$

문제 8 다음 선형변환의 핵과 치역을 각각 구하여라.

(1) $T: P_2 \to P_3$, $T(p(x)) = x\,p(x)$

(2) $T: \mathcal{E}[0, 1] \to R$, $T(f(x)) = \int_0^1 f(x)\,dx$

문제 P1 W_1, W_2가 벡터공간 V의 부분공간이면 $W_1 \cap W_2$도 V의 부분공간임을 증명하여라.

문제 P2 a를 R^3의 한 고정벡터라 하자. W를 a와 수직인 모든 벡터들의 집합이라 하면
$W = \{\mathrm{x} \in R^3 | \mathrm{a} \cdot \mathrm{x} = 0\}$는 R^3의 부분공간임을 보여라.

문제 P3 유클리드 내적을 갖는 벡터공간 C^3상에서 $\mathrm{u}_1 = (i, i, i)$, $\mathrm{u}_2 = (0, i, i)$, $\mathrm{u}_3 = (0, 0, i)$를 Gram-Schmidt 과정을 이용하여 정규직교기저로 바꾸어라.

문제 P4 다음과 같이 주어진 선형변환 $T: M_2 \to M_2$의 표준행렬을 구하여라.

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{21} & a_{11} + a_{21} \\ a_{12} - 2a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

문제 P5 $T: M_2(R) \to M_2(R)$이 다음과 같다. $T(A) = A + A^T$ 주어진 변환이 선형변환임을 보이고 핵과 치역을 각각 구하여라.

Chapter 10

Jordan 표준형(with Sage)

10.1 점도표를 이용한 Jordan 표준형 구하기
10.2 Jordan 표준형과 일반화된 고유벡터
10.3 Jordan 표준형과 컴퓨터 활용
연습문제

행렬의 대각화는 복잡한 행렬 계산 과정을 단순화하여 편리한 이론의 전개와 빠른 계산 방법을 제시해줍니다. 예를 들어, 미분방정식을 풀거나 인구 또는 날씨 변화를 예측하는 문제와 같이 다양한 문제에 적용됩니다. 따라서 행렬의 대각화는 수학적 모델로 구성된 현실세계의 문제를 해결하는 데 매우 중요합니다. 그러나 모든 행렬이 대각화가능하지는 않습니다.

이 장에서는 주어진 행렬에 대하여 닮음인 Jordan 표준형(표준형 블록대각선행렬)을 찾는 방법과 일반화된 고유벡터에 대하여 응용과 함께 학습하겠습니다.

선형대수학

10.1 점도표를 이용한 Jordan 표준형 구하기

- 참고 동영상: http://youtu.be/NBLZPcWRHYI
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-15-sec-10-1.html

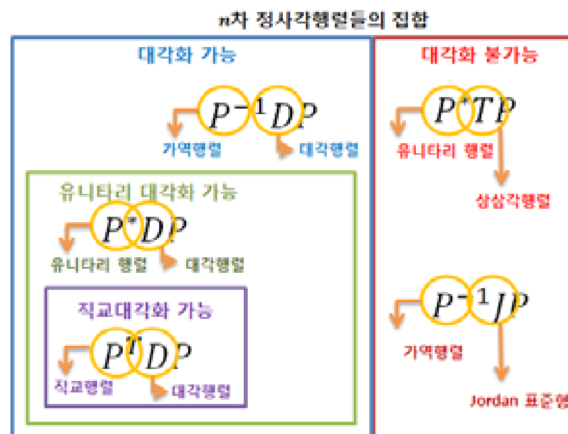


주어진 행렬이 대각화가능하다면 이 행렬과 관계된 대부분의 문제는 쉽게 다루어져 원하는 결론을 얻을 수 있다. 그러나 모든 행렬이 대각화가능한 것은 아니다. 이 절에서는 주어진 행렬과 닮음인, 대각선행렬과 거의 유사한 행렬인 Jordan 표준형을 구하는 방법을 소개한다.

참고 정사각행렬의 대각화(복습)

1. n차 정사각행렬 A가 대각화가능할 필요충분조건은 A가 n개의 일차독립인 고유벡터를 갖는다는 것이다.
2. A가 정규행렬일($AA^* = A^*A$) 필요충분조건은 A가 유니타리 대각화가능이다.
3. 그러나 정규행렬이 아니면서도 대각화가능한 행렬은 존재한다.
4. 행렬 A가 대각화가능이면, 각각의 고유값에 대한 고유공간 $\text{null}(\lambda I - A)$의 차원(기하적 중복도)이 그 고유값의 (대수적) 중복도와 같아야 한다.

- 대각화가능하지 않은 행렬도 대각선행렬과 유사한 행렬(block diagonal matrix)인 Jordan 표준형과 닮음(similar)이 되도록 만들 수 있다(**정리** 10.1.1).



 10.1.1

n 차의 정사각행렬 A 가 $t\,(1 \le t \le n)$개의 일차독립인 고유벡터를 가지면 A 는 다음과 같은 행렬 J_A 와 (유니타리) 닮음이다.

$$J_A = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_t \end{bmatrix}_{n \times n}$$

즉 $U^* A U = J_A$ 인 유니타리 행렬 U 가 존재한다. 여기서

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_k \times n_k}, \quad (n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n,\ 1 \le k \le t)$$

이다. 이때 J_k 를 A 의 고유값 λ_i에 대응하는 하나의 Jordan block이라 하고, J_A 를 A 의 Jordan 표준형(JCF, Jordan canonical form)이라 한다.

- A 의 Jordan 표준형(JCF)은 고유값 및 1과 0으로 이루어진 Jordan block들을 대각선성분으로 갖는 block 대각행렬이라고 볼 수 있다. 즉 임의의 행렬 A 는 언제나 자신의 JCF라는 block 대각행렬과 유니타리 닮음이라는 의미이다.

 Jordan block의 성질

1. 하나의 고유값에 대응하는 Jordan block의 개수는 기하적 중복도, 즉 일차독립인 고유벡터들의 개수와 일치한다.

2. Jordan block의 크기는 해당하는 고유값에 대한 고유벡터들의 성질에 의하여 크기가 결정된다. 단 그 크기들의 합은 그 고유값에 대한 대수적 중복도가 된다.

3. 만일 행렬 A 의 모든 고유값의 기하적 중복도와 대수적 중복도가 같게 되면, 모든 Jordan block은 크기가 1×1 이 되고, 그 개수는

   기하적 중복도의 합 = 대수적 중복도의 합 = 행렬의 크기

   만큼이 된다. 즉 대각선행렬이 되며, 이 경우가 대각화가능한 행렬이 될 필요충분조건 이다 (이런 행렬을 Simple 행렬이라고 한다).

예제 1

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

은 특성다항식으로 $\det(A-\lambda I)=(\lambda-2)^4(\lambda-3)^2\lambda^2$을 갖는 어떤 8차 정사각행렬 A의 Jordan 표준형이다.

각 고유값의 중복도가 J_A의 주대각선에 나타나는 고유값의 개수를 결정한다는 것을 주목하자. 대각선에 고유값 2는 4개, 3은 2개, 0은 2개가 있다. 즉 각 고유값의 대수적 중복도는 그 고유값에 대응하는 모든 Jordan block들의 크기의 합과 일치함을 확인할 수 있다.

각 고유값에 대응하는 Jordan block의 개수는 각 고유값의 기하적 중복도이다. ■

예제 2 5차의 정사각행렬 A가 중복도 5인 고유값 λ 하나만을 갖고 λ에 대응하는 일차독립인 고유벡터를 단 하나만 갖는다면 A의 Jordan 표준형은 다음과 같다.

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

왜냐하면 A의 일차독립인 고유벡터는 하나밖에 없으므로 Jordan block이 단 하나이기 때문이다. ■

Jordan 표준형 구하는 방법

- 행렬 $A \in M_n$가 k개의 서로 다른 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$를 갖는다고 할 때, A의 Jordan 표준형 J_A는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J_A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix}$$

- 여기서 각 A_i는 고유값 λ_i에 대응하는 적당한 크기의 Jordan block들의 block 대각선행렬이다. 이것을 J_A의 block 부분행렬이라 한다. 이제 우리는 각각의 고유값 λ_i에 대한

$$A_i = \begin{bmatrix} J_{i,p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{i,p_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{i,p_{l_i}} \end{bmatrix}$$

의 구조만 알면 J_A를 쉽게 구할 수 있게 된다. J_A를 구할 때 λ_i를 감소(또는 증가)하는 값의 순서로 정하고 그 안의 Jordan block들에 block의 크기순으로 순서를 주면 J_A는 유일하게 결정된다.

- 우선 각 λ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$에 대하여 A_i 안의 Jordan block의 개수 l_i $(1 \le i \le k)$와 각각의 $J_{i,p_t} \in M_{p_t}$의 크기 p_t $(1 \le t \le l_i)$를 구하자. λ_i에 대응하는 일차독립인 고유벡터를 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_{l_i}$라 하고, 부호를 단순히 하기 위하여 우선 하나의 고유값에 대하여만 생각하자. 따라서 이 λ_i를 λ, l_i를 l이라 하자.

- 그런데 A_i의 각 Jordan block의 개수 l과 각각의 block의 크기 $p_1, p_2, \ldots, p_l$들은 $A - \lambda I$의 어떤 거듭제곱의 계수를 계산하여 결정한다. 일반성을 잃지 않고 $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_l$이라 할 수 있다. 이제 고유값 λ와 그에 대한 고유공간의 차원(기하학적 중복도)인 l과 p_t를 이용하여 A_i를 쉽게 구할 수 있는 점들의 배열을 소개하도록 하겠다. 이를 점도표(dot diagram)라 부른다. 점도표는 아래와 같은 규칙으로 정해진다.

참고 점도표 규칙

1. 점도표는 l개의 열에 의하여 이루어진다(즉, l개의 Jordan block).

2. l개의 숫자 $p_1, p_2, \ldots, p_l$을 크기순으로 하여 왼쪽에서 오른쪽으로 배열하여 아래와 같이 도표를 만들자. 그러면 이 도표의 j번째 열의 점들은 k_j개로 이루어진다(여기서 k_j는 $(A-\lambda I)^{k_j}(\mathrm{x}_j) = 0$ 되는 첫 번째 k_j이다). 만일 x_j가 j번째 열의 맨 아래의 점이면, 그 맨 위는 $(A-\lambda I)^{k_j - 1}(\mathrm{x}_j)$에 대응하는 점이 된다. 그 열의 위에서 두 번째의 점은 $(A-\lambda I)^{k_j - 2}(\mathrm{x}_j)$에 대응한다.

● 따라서 A_i에 대응하는 점도표는 아래와 같다.

• $(A-\lambda I)^{k_{p_1}-1}(\mathrm{x}_1)$ • $(A-\lambda I)^{k_{p_2}-1}(\mathrm{x}_2)$ $\cdots$ • $(A-\lambda I)^{k_{p_l}-1}(\mathrm{x}_l)$

• $(A-\lambda I)^{k_{p_1}-2}(\mathrm{x}_1)$ • $(A-\lambda I)^{k_{p_2}-2}(\mathrm{x}_2)$ $\cdots$ $\vdots$

$\vdots$ $\vdots$ • x_l

• $(A-\lambda I)(\mathrm{x}_1)$ • x_2

• x_1

● 여기서 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_l$은 λ_i에 대응하는 일차독립인 고유벡터들이다. 만일 r_j를 점도표에서 j번째 행의 점의 개수라 하면, r_1은 1×1 이상의 크기의 Jordan block의 개수이고, r_2는 2×2 이상의 크기의 Jordan block의 개수이며, r_{p_1}은 $p_1\times p_1$ 이상의 크기의 Jordan block의 개수이다. 따라서 $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_{p_1}$임을 알 수 있다. 정리 10.1.2와 10.1.3을 참고하고, 아래 예를 통하여 살펴보자.

예제 3 9×9 행렬 A_i는 그 안의 Jordan block의 개수인 수 l과 각 Jordan block의 크기인 $p_1, p_2, \ldots, p_l$에 의하여 완전하게 결정된다는 것을 보이기 위하여 $l=4$라 하고 $p_1=3,\ p_2=3,\ p_3=2,\ p_4=1$이라 하자. 그러면 block의 크기 순서에 따라

$$A_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

로 유일하게 결정된다. 이것의 점도표를 구하면 $l=4,\ p_1=3,\ p_2=3,\ p_3=2$이고 $p_4=1$이므로 λ_i에 대한 점도표는 아래와 같다.

• • • • (Jordan block의 개수: 4)

• • •

• •

■

정리 10.1.2

λ_i에 대한 점도표의 처음 r개 행 안의 점의 수는 $(A-\lambda_i I)^r \mathrm{x} = 0$의 해공간의 차원(즉, $(A-\lambda_i I)^r$의 nullity)과 같다.

- $\text{nullity}(A-\lambda_i I)^r = \text{nullity}(J_A - \lambda_i I)^r$이다.

정리 10.1.3

행렬 $A \in M_n(C)$에 대하여 r_j를 λ_i에 대한 점도표의 j번째 행에 있는 점의 개수라 하면

(1) $r_1 = n - \text{rank}(A-\lambda_i I)$
(2) 만일 $j > 1$이면, $r_j = \text{rank}((A-\lambda_i I)^{j-1}) - \text{rank}((A-\lambda_i I)^j)$

증명 정리 10.1.2에 의하여,

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_j = \text{nullity}\ ((A-\lambda_i I)^j) = n - \text{rank}((A-\lambda_i I)^j)\ \ (\text{단},\ j \geq 1)$$

그리고 $r_1 = n - \text{rank}((A-\lambda_i I)^1)$이고

$$\begin{aligned} r_j &= (r_1 + r_2 + \cdots + r_j) - (r_1 + r_2 + \cdots + r_{j-1}) \\ &= [n - \text{rank}((A-\lambda_i I)^j)] - [n - \text{rank}((A-\lambda_i I)^{j-1})] \\ &= \text{rank}((A-\lambda_i I)^{j-1}) - \text{rank}((A-\lambda_i I)^j),\ j > 1 \end{aligned}$$

(각 행의 점의 개수 r_j는 $j \times j$ 이상의 block의 개수를 의미함) ■

- **정리** 10.1.3은 λ_i에 대한 점도표는 행렬 A에 의하여 완전히 결정됨을 보여준다.

예제 4 다음 행렬 A의 Jordan 표준형을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

풀이

```
A=matrix(4, 4, [2, -1, 0, 1, 0, 3, -1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, -1, 0, 3])
print A.charpoly().factor()
print A.eigenvalues()
```

```
(x - 3) * (x - 2)^3
[3, 2, 2, 2]
```

에서 행렬 A의 특성방정식은 $\det(A-\lambda I)=(\lambda-3)(\lambda-2)^3$이므로 A는 두 개의 서로 다른 고유값 λ_1, λ_2를 갖는다.

여기서 $\lambda_1=3$은 중복도가 1이고 $\lambda_2=2$는 (대수적) 중복도가 3이다. 따라서 λ_1에 대응하는 점도표는 1개의 점을 갖고 그에 대한 점도표는

•

이므로, A_1은 1×1 Jordan block 1개, 즉 $A_1=[3]$이다. 또, λ_2에 대응하는 점도표는 3개의 점을 갖는다. 그리고

```
E=identity_matrix(4)
print (A-2*E).rank()
print ((A-2*E)^2).rank()
```

```
2
1
```

이므로 $r_1=4-\text{rank}(A-2I)=4-\text{rank}\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\0&1&-1&0\\0&1&-1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}=4-2=2$ 이고,

$r_2=\text{rank}(A-2I)-\text{rank}\,[(A-2I)^2]=2-1=1$ 이다.

따라서 λ_2에 대한 점도표는 다음과 같다.

$r_1=2$: • • (Jordan block의 개수: 2)
$r_2=1$: •

따라서 A_2는 2×2 Jordan block이 1개이고, 1×1 Jordan block이 1개이다. 즉,

$$A_2=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

이므로 행렬 A 의 Jordan 표준형은 다음과 같다.

$$\therefore\ J_A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

```
A=matrix(4, 4, [2, -1, 0, 1, 0, 3, -1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, -1, 0, 3])
J=A.jordan_form()   # Jordan 표준형
print J
```

```
[3|0 0|0]
[-+---+-]
[0|2 1|0]
[0|0 2|0]
[-+---+-]
[0|0 0|2]
```
■

예제 5 다음 행렬 A 의 Jordan 표준형을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

풀이

A 의 특성방정식은 $\det(A-\lambda I) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$이고, 따라서 A 의 두 개의 서로 다른 고유값은 각각 중복도가 2인 $\lambda_1 = 4$와 $\lambda_2 = 2$이다. $\lambda_1 = 4$에 대하여

$$r_1 = 4 - \text{rank}(A-4I) = 4-3 = 1$$

이므로(즉, 1개의 Jordan block) r_2는 1이다($\because$ 점의 수 $2 = 1+(1)$).
따라서 λ_1에 대한 점도표는 다음과 같다.

$$r_1 = 1 : \ \bullet \qquad \text{(Jordan block의 개수: 1)}$$

$$r_2 = 1 : \bullet$$

따라서, $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$에 대하여 $r_1 = 4 - \text{rank}(A - 2I) = 4 - 2 = 2$이므로(즉, 2개의 Jordan block), r_2는 0이다($\because$ 점의 개수 $2 = 2 + (0)$). 즉 λ_2에 대한 점도표는 다음과 같다.

$$r_1 = 2 : \bullet\ \bullet \quad \text{(Jordan block의 개수: 2)}$$

즉, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

그러므로 A의 Jordan 표준형은 $J_A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ □

Sage풀이 http://sage.skku.edu 또는 http://mathlab.knou.ac.kr:8080/

```
A=matrix(4, 4, [2, -2, -2, -2, -4, 0, -2, -6, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 3, 7])
J=A.jordan_form()   # Jordan 표준형
print J
```

```
[4 1|0|0]
[0 4|0|0]
[---+-+-]
[0 0|2|0]
[---+-+-]
[0 0|0|2]
```
■

참고 Jordan 표준형 학습자료

- http://matrix.skku.ac.kr/2012-mobile/E-CLA/10-1.html
- http://matrix.skku.ac.kr/2012-mobile/E-CLA/10-1-ex.html

10.2 Jordan 표준형과 일반화된 고유벡터

- 참고 동영상: http://www.youtube.com/watch?v=yJ7n0icjtNA
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-15-sec-10-2.html
  http://matrix.skku.ac.kr/sglee/03-Note/GeneralizedEV-f.pdf
  http://matrix.skku.ac.kr/MT-04/chp8/3p.html



10.1절에서 $P^{-1}AP=J_A$가 되는 J_A를 구하는 이론과 방법을 배웠다. 이 절에서는 $P^{-1}AP=J_A$를 만드는 P를 구하는 방법을 살펴보자. 이 과정에서 일반화된 고유벡터를 이용한다.

10.3 Jordan 표준형과 컴퓨터 활용

- 참고 동영상: http://youtu.be/LxY6RcNTEE0
- 실습 사이트: http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-week-15-sec-10-3.html



실제로 크기가 10차인 행렬의 Jordan 표준형을 구하기 위해서는 10차인 특성방정식의 근을 구해야 하는데, 이를 인수분해 또는 근의 공식으로 찾는 것은 불가능하다. 더구나 우리는 10×10 행렬의 수많은 거듭제곱과 계수를 구하여야 한다. 계수를 구하기 위해서 수행해야 하는 Gauss 소거법 등의 이런 계산과정은 손으로 해결하는 것보다 HLINPRAC이나 MATHEMATICA 또는 MATLAB, 특히 최근에 웹상에서 자유롭게 사용할 수 있는 Sage 등의 기존의 수학 소프트웨어를 이용하는 것이 불가피하다.

수학을 외면하는 사람은
문명의 힘을 온전히 이해할 수 없다
케메니 1926-1992

수학자이자 컴퓨터 과학자
프로그래밍언어 베이직 개발



Chapter 10 연습문제

http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm

문제 1 5차 정사각행렬 A가 중복도가 5인 고유값 λ만을 갖고, λ에 대응하는 일차독립인 고유벡터가 2개인 경우 A의 Jordan 표준형의 종류를 구하여라.

문제 2 다음 Jordan 표준형 J_A에 대하여 다음을 구하여라.

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(1) $J_A - \lambda I$

(2) $(J_A - \lambda I)^2$

(3) $(J_A - \lambda I)^3$

(4) $(J_A - \lambda I)^4$

[문제 3 - 문제 8] **다음 행렬의 Jordan 표준형을 구하여라.**

문제 3 $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

문제 4
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

문제 5
$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

문제 6
$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

문제 7
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

문제 8
$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- 세상 무엇보다 수학을 사랑한 사람들이 들려주는 수학 이야기 -

http://prezi.com/z0hgrw8a6wql/define-math/

국제선형대수학회 ILAS 2014 공식 사진:http://matrix.skku.ac.kr/2014-Album/ILAS-2014/
ILAS 2014 동영상 A - 등록과 발표:http://youtu.be/asJfRFYWPrk
ILAS 2014 동영상 B - 관광 : http://youtu.be/bidJNagmRXQ
ILAS 2014 동영상 C - 만찬 : http://youtu.be/10fDqWA-vVA
ILAS 2014 동영상 D - 단체 사진 : http://youtu.be/6lIS8U6i_8E
ILAS 2014 동영상 E - 학회 준비 : http://youtu.be/UMwLCtSGByI





[이임학] 세계에서 인정받은 최초의 한국인 수학자, Ree 군(Ree group)을 발견

http://matrix.skku.ac.kr/2011-Album/ReeImHak-v1.htm

http://matrix.skku.ac.kr/KMS/KMS-Ree-1996.htm

http://article.joins.com/news/article/article.asp?ctg=12&Total_ID=1129961

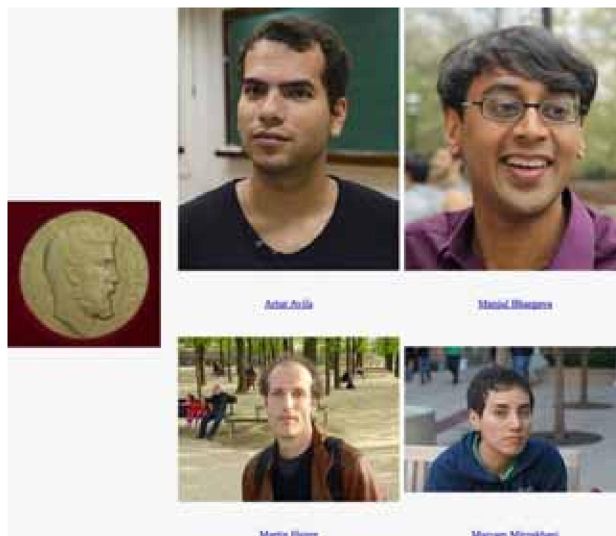
2014 국제수학자 대회 (ICM 2014, COEX, Seoul), 필즈상 수상자 :■

http://matrix.skku.ac.kr/2014-Album/2014-ICM-SGLee/

https://www.facebook.com/SEOULICM2014

http://www.icm2014.org/en/vod/videos

http://www.icm2014.org/en/vod/public



Appendix

부록

1. 실습도구 활용방법
2. 색인(index)
3. 그림 색인(index)
4. 읽을거리
5. 참고문헌
6. 관련 사이트
7. 기출문제(임용고사 포함)

선형대수학

1. 실습도구 활용방법

[동영상] https://www.youtube.com/watch?v=V0xJvW-YjWs
[문제와 풀이] http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/
[동영상 강의] http://matrix.skku.ac.kr/2012-album/2012-LA-Lectures.htm
[CAS] http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm
[도서관] http://matrix.skku.ac.kr/2012-e-Books/index.htm

1. Sage 노트북(Notebook)

우리는 Sage 노트북을 이용하여 다양한 수학 연산을 실행할 수 있다. 본 서비스를 이용하기 위해서는 먼저 계정이 필요한 데, 아래 〈그림 1〉은 교육부 과제로 본 연구진이 만들어 한국방송통신대 프라임칼리지에서 운영 중인 Sage 노트북 서버(http://sage.knou.ac.kr)이다. 이를 이용하여 본 절에서는 Sage 노트북을 사용하는 주요 방법을 설명한다.



〈그림 1〉 프라임칼리지 Sage Notebook 서버

(1) 계정 만들기

① Sage와 호환성이 좋은 구글 https://www.google.co.kr/chrome/browser/ **크롬 브라우저**를 설치 후 http://sage.knou.ac.kr 또는 http://sagenb.skku.edu/에 접속하고, **Sage 노트북 계정 가입하기** 버튼을 클릭하면 〈그림 2〉와 같이 Sage 노트북 계정 가입하기 화면을 확인할 수 있다.



〈그림 2〉 Sage 노트북 계정 가입

② 사용자 이름(ID), 사용자 암호, 이메일 주소를 입력한 후 계정 생성 (Create account) 버튼을 누르면 계정을 생성할 수 있고, 이제 생성한 ID, 암호를 이용하여 개인 계정을 이용할 수 있다.

(2) Sage 노트북의 메인 화면

위에서 생성한 ID와 암호를 입력한 후 로그인 하면 〈그림 3〉과 같은 Sage 노트북의 메인 화면을 확인할 수 있다.



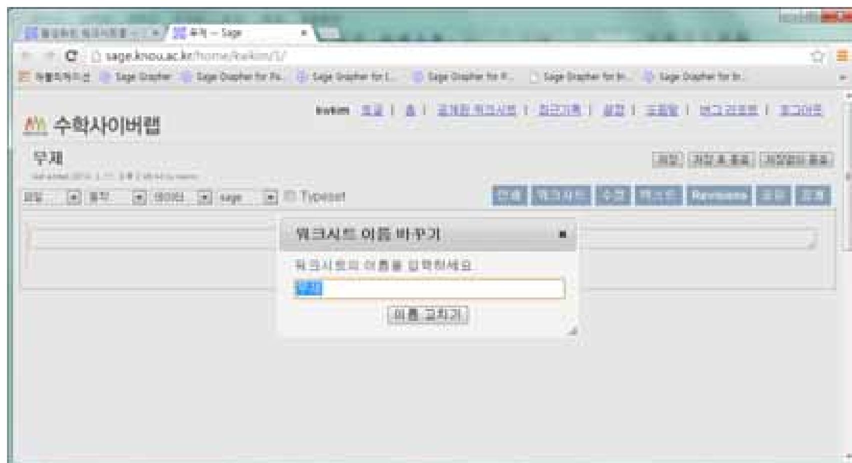
〈그림 3〉 Sage Notebook 메인 화면

□ 주요 메뉴 소개

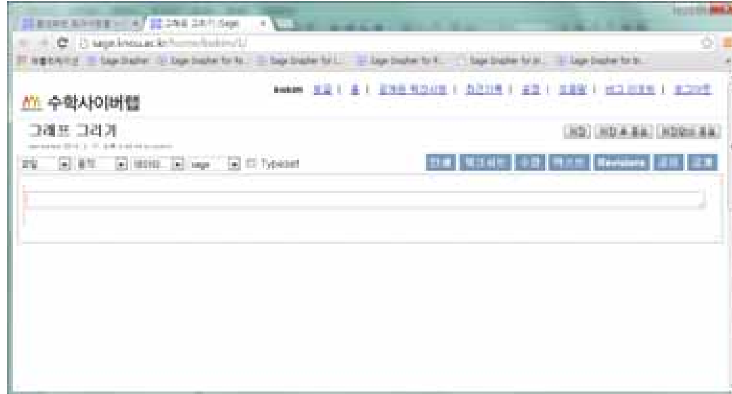
- 홈 : Sage 노트북 메인 화면 확인
- 공개된 워크시트 : 공개된 워크시트 확인
- 설정 : 사용자 암호 및 사용자 정보 설정
- 로그아웃 : Sage 노트북 종료
- 새 워크시트 : 새로운 워크시트 작성
- 업로드 : Sage 워크시트 파일(sws 형식) 업로드
- 다운로드 : 선택한 Sage 워크시트 다운로드(sws 형식)

(3) Sage 노트북의 워크시트 화면

이제 새로운 워크시트를 작성하기 위해 새 워크시트 를 누르면 <그림 4>와 같이 워크시트 이름을 입력하는 창을 확인할 수 있다. 이때 적당한 워크시트 이름을 입력한 후 이름 고치기 버튼을 클릭하면 <그림 5>와 같이 Sage 명령어를 입력하여 실행시킬 수 있는 Sage 노트북 워크시트 화면을 확인할 수 있다.



<그림 4> Sage 노트북 메인 화면



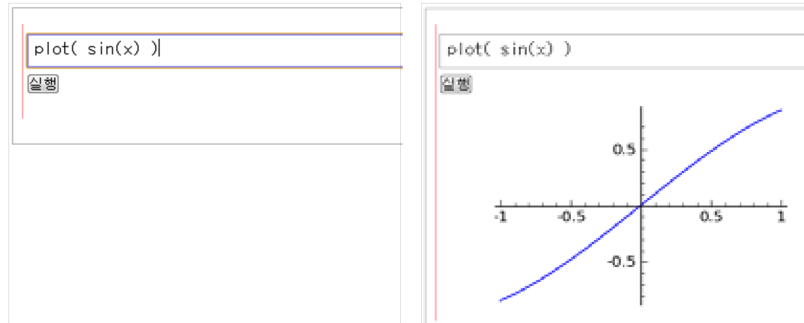
〈그림 5〉 Sage 노트북 워크시트 화면

□ 주요 메뉴 소개

- 홈 : Sage 노트북 메인 화면 확인
- 공개된 워크시트 : 공개된 워크시트 확인
- 설정 : 사용자 암호 및 사용자 정보 설정
- 로그아웃 : Sage 노트북 종료
- 저장 저장 후 종료 저장없이 종료 : 워크시트 저장, 워크시트 저장 후 종료, 워크시트 저장을 하지 않은채로 종료
- 파일... : sws 파일 업로드, 새 워크시트 작성, 현재 워크시트 다운로드, 인쇄, 워크시트 이름 바꾸기, 워크시트 복사, 워크시트 삭제
- 동작... : 연산 강제 종료, 워크시트 재시작, 워크시트 저장 후 종료, Sage 명령어 전부 실행, 결과 숨기기, 결과 보이기, 결과 지우기
- 데이터... : Sage 노트북 서버에 (활용할) 각종 파일 업로드
- sage : Sage, GAP, GP, Python, R 명령어 실행 설정
- 공개 : 현재 워크시트를 html 형식으로 공개

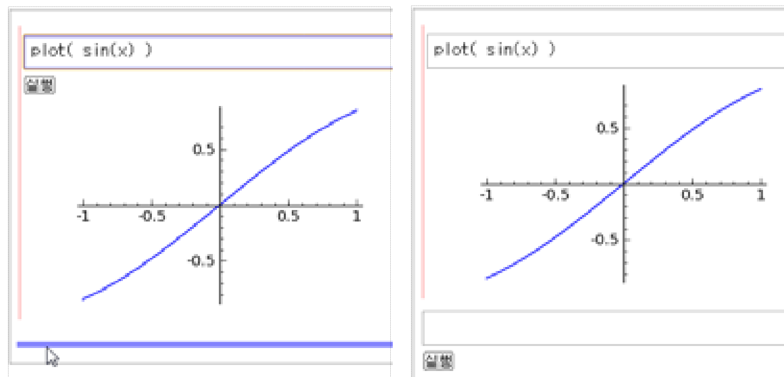
(4) Sage 명령어의 입력 및 실행

〈그림 6〉과 같이 빈칸 부분에서 Sage 명령어를 입력하고 실행 버튼을 누르면, 그 결과를 확인할 수 있다.



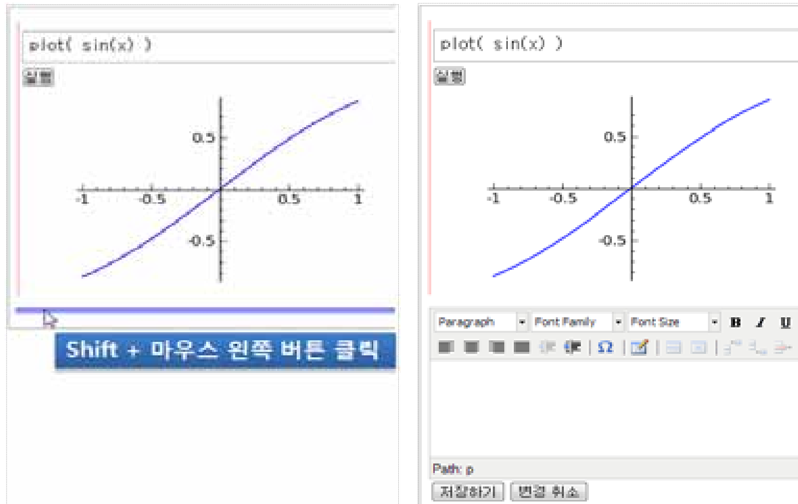
〈그림 6〉 Sage 명령어 실행 전(좌), 실행 후(우)

그리고 마우스를 결과 아래에 위치시키면 〈그림 7〉과 같이 파란색 선을 확인할 수 있는데, 이때 이 선을 마우스 왼쪽 버튼으로 클릭하면 Sage 명령어를 입력할 수 있는 새로운 셀(Cell)을 추가할 수 있다.



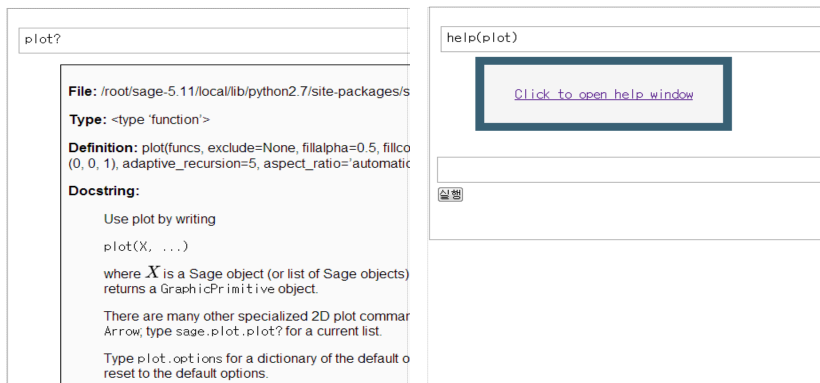
〈그림 7〉 새로운 Sage 셀 추가

또는 파란색 선을 Shift 버튼을 누른 채로 마우스 왼쪽 버튼으로 클릭하면 〈그림 8〉과 같이 HTML 설명을 추가할 수 있는 텍스트 박스를 열 수 있다. 이 텍스트 박스에서는 다양한 서식과 수식을 이용하여 설명을 추가할 수 있다. 저장하기 버튼을 클릭하여 입력한 설명들을 화면에 나타낼 수 있고, 그 설명을 다시 마우스 왼쪽 버튼으로 더블 클릭하면 다시 텍스트 박스를 띄워 내용들을 수정할 수 있다.



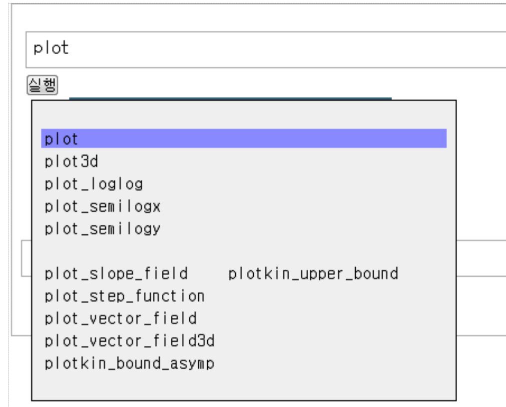
〈그림 8〉 HTML 설명을 추가할 수 있는 텍스트 박스

만약 사용법을 잘 모르는 Sage 명령어가 있다면, 그 명령어 뒤에 "?" 를 붙이거나 "help(Sage 명령어)" 입력하고 실행 버튼을 누르면 〈그림 9〉와 같이 해당 Sage 명령어에 대한 자세한 설명을 확인할 수 있다.



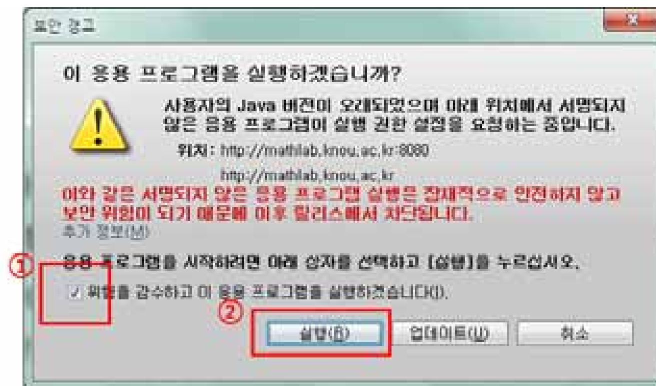
〈그림 9〉 Sage 명령어 튜토리얼

그리고 "plot" 을 입력한 후 "TAB" 키를 누르면 〈그림 10〉과 같이 "plot" 으로 시작하는 모든 Sage 명령어를 확인할 수 있다. 해당 기능은 잘 생각나지 않는 Sage 명령어를 입력할 때나, 비교적 길이가 긴 Sage 명령어를 입력할 때 시간을 줄이는데 매우 효과적이다.



〈그림 10〉 Sage 명령어 자동완성 기능

만약 3D 관련 명령어를 실행하여 아래와 같은 Java 보안 경고창이 실행된다면, 아래 그림의 1번 체크박스 부분에 체크를 하고 실행(R) 버튼을 클릭한다.

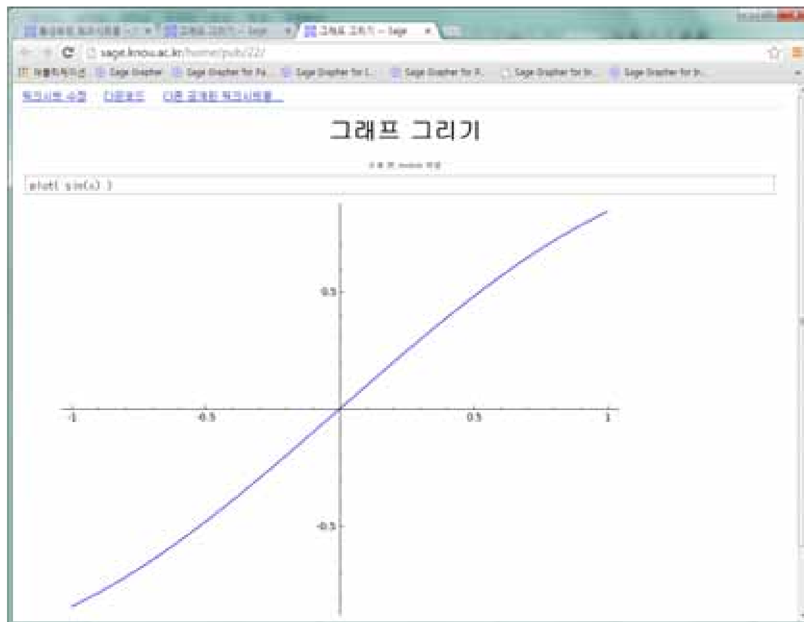


(5) 워크시트 저장 및 공개, 종료

Sage 워크시트를 작성한 후, 우리는 [저장] [저장 후 종료] [저장없이 종료] 버튼들을 활용하여 워크시트를 저장시키거나 워크시트를 종료시킬 수 있다. 또한 [공개] 버튼을 클릭하여(〈그림 11〉 참조) 해당 내용을 〈그림 12〉와 같이 HTML 형식으로 웹상에 공개시킬 수 있다. 이 공개된 자료는 별도의 Sage 노트북 서버에 로그인을 하지 않아도 웹 주소의 접속만으로 확인을 할 수 있다. 기존의 공개된 자료는 주소 http://math1.skku.ac.kr/pub/ 에서 확인할 수 있다.



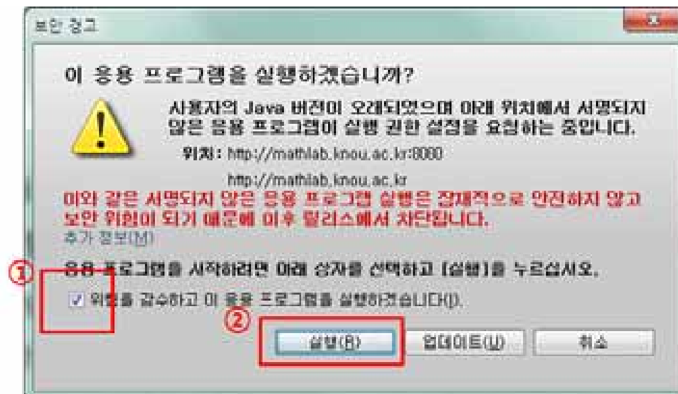
〈그림 11〉 워크시트 공개



〈그림 12〉 웹상에 공개된 워크시트

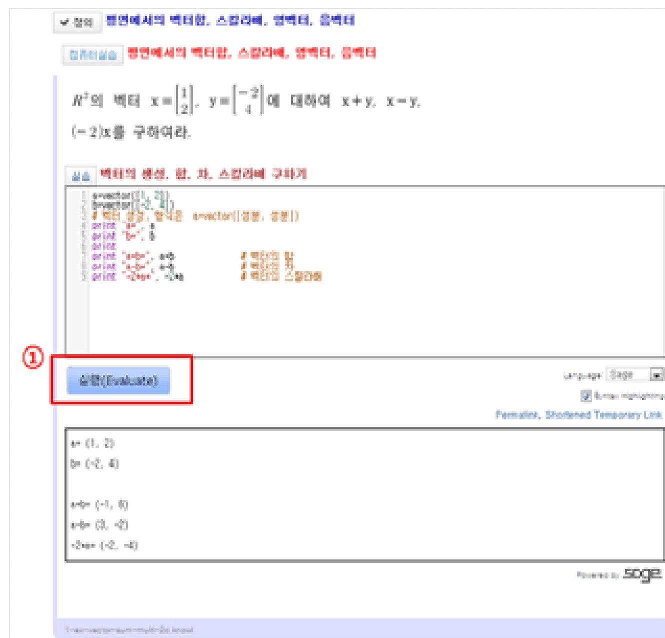
2. Sage Cell 연산 서버

(1) 사이버랩을 실행하는데 아래와 같은 JAVA 보안 경고창이 실행된다면, 아래 그림의 1번 체크박스 부분에 체크를 하고 실행(R) 버튼을 클릭한다.



(2) 기본적으로 Sage Cell을 활용하는 방법은 다음과 같다.

① 실행(Evaluate) 버튼을 클릭하여 이미 주어진 실습 문제에 대한 결과를 확인한다.

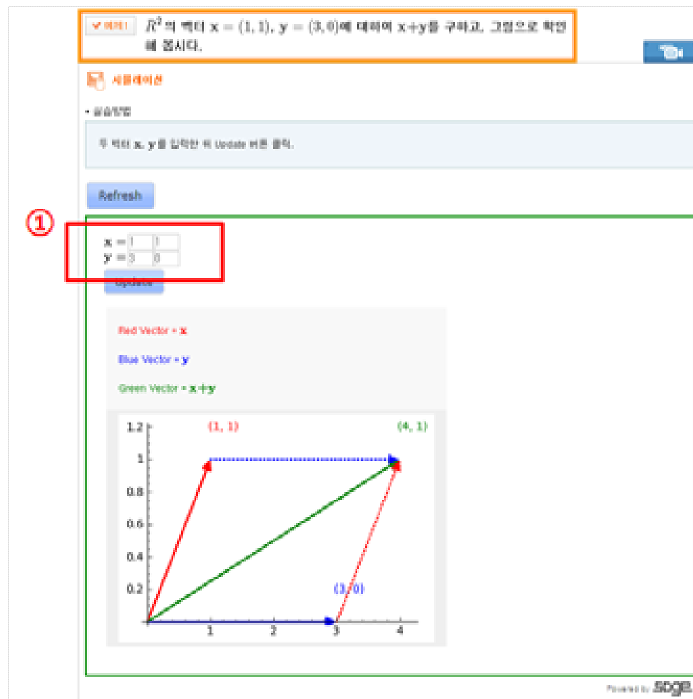


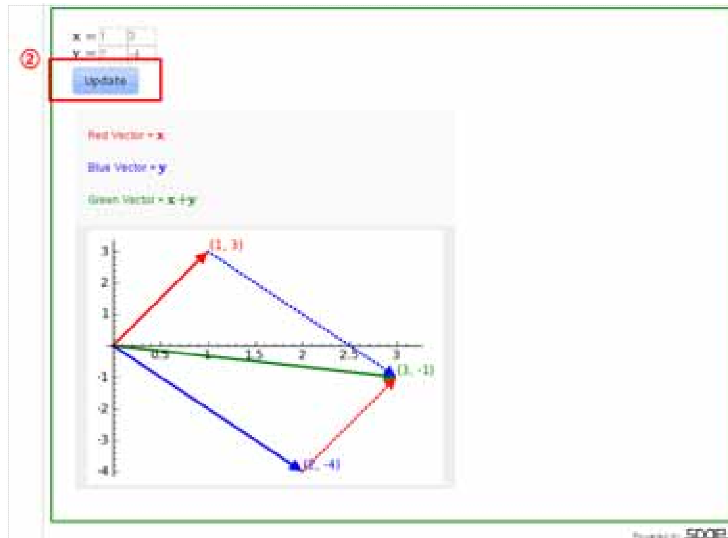
② 새로운 문제에 맞게 숫자 또는 코드를 수정하고, 실행(Evaluate) 버튼을 클릭하여 새로운 문제에 대한 결과를 확인한다.

(예) 벡터 $a=(10,\ 2)$, $b=(-2,\ -14)$

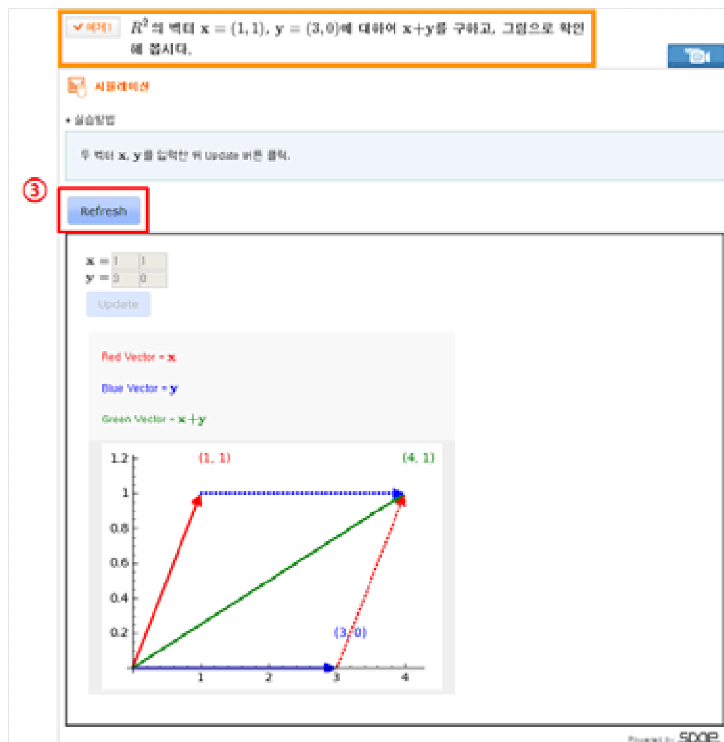


③ 코드가 없는 시뮬레이션 도구들은 주어진 칸들의 값을 바꾸고, Update 버튼을 클릭하면 그 결과를 확인할 수 있다.





④ 만약 아래 그림과 같이 오랜 시간이 지나서 Update 버튼을 클릭할 수 없다면, Refresh 버튼을 클릭하여 시뮬레이션을 다시 실행할 수 있다.



3. 기본적인 Sage 명령어

http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/Appnd/index.htm

(1) 정의

- 변수 x var(‘x’)
- 벡터 $< 1, 2, 3 >$ vector([1, 2, 3])
- 벡터함수 $(2-5t,\, 4t,\, 1+3t)$ vector([2-5*t, 4*t, 1+3*t])
- 행렬 matrix([[1, 2], [3, 4]])
- 값 정의(예: a=3) a=3
- 함수의 정의 f(x)=x^2

(2) 벡터와 행렬

- 벡터의 크기 a.norm()
- 벡터의 내적 b.dot_product(a)
- 벡터의 외적 b.cross_product(a)
- 행렬식 det(A)
- 행렬의 크기 len(A)
- 행렬의 고유값 A.eigenvalues()
- 행렬의 고유벡터 A.eigenvectors_right()

(3) 미분과 적분

- 도함수 diff(f(x), x)
- 부정적분 integral(f(x), x)
- $[a,\, b]$에서 적분 integral(f(x), x, a, b)
- 이중적분 integral(integral(f(x), (x, 0, 1)), (y, 0, 1))
- 삼중적분 integral(integral(integral(f(x), (x, 0, 1)), (y, 0, 1)), (z, 0, 1))

(4) 그래프 그리기

- 일반함수(2D) plot(f(x), (x, -4, 4))
- 매개변수함수(2D) parametric_plot((f(x), g(x)), (x, 0, 2*pi))

- 음함수(2D) implicit_plot(f(x, y)==0, (x, −2, 2), (y, −2, 2))
- 선분(2D) line([(1, 1), (2, 2)], color='red')
- 일반함수(3D) plot3d(f(x, y), (x, −2, 2), (y, −2, 2))
- 매개변수함수(3D) parametric_plot3d((f(x), g(x), h(x)), (x, 0, 2*pi))
- 음함수(3D) implicit_plot3d(f(x, y, z)==0, (x, −3, 3), (y, −3, 3), (z, −3, 3))
- 선분(3D) line([(1, 1, 1), (2, 2, 2)], color='red')
- Contour Plot contour_plot(f(x, y), (x, −1, 1), (y, −1, 1), cmap='hsv', labels=True)
- 벡터필드(2D) plot_vector_field((x+y, x), (x, −3, 3), (y, −3, 3))
- 벡터필드(3D) plot_vector_field3d((x*cos(z), −y*cos(z), sin(z)), (x, 0, pi), (y, 0, pi), (z, 0, pi))

(5) 극한

- a에서 극한 limit(f(x), x=a)
- a에서 우극한 limit(f(x), x=a, dir='+')
- a에서 좌극한 limit(f(x), x=a, dir='−')
- $+\infty$ 에서의 극한 limit(f(x), x=+oo)
- $-\infty$ 에서의 극한 limit(f(x), x=−oo)

(6) 기타

- 방정식 풀이 solve(f(x)==0, x)
- 급수($\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$) sum(p(n), n, 1, +oo)
- 변수 a의 값 보이기 print a
- 정의된 함수 f 보이기 show(f)
- 조건문

```
if 조건:
    statement(s)    # 조건이 True이면 실행할 명령어
else:
    statement(s)    # 조건이 False이면 실행할 명령어
```

- 반복문

```
for i in range(10):
    print i         # i=0~9 까지 i를 출력
```

2. 색인(index)

(유클리드) 내적 13
(직선의) 대칭방정식 18
(직선의) 매개방정식 18
(직선의) 벡터방정식 18
(평면의) 매개방정식 19
(평면의) 벡터방정식 19
block 대각행렬 355
Gauss 소거법 42
Gauss-Jordan 소거법 43
Gram-Schmidt 정규직교화과정 239
Hermitian 행렬 309
Jordan 표준형(JCF) 355
n차원 벡터 8
point-normal 방정식 19
QR-분해 244
Rank 정리 223
Sarrus 방법 102
Schur 정리 313
Simple 행렬 355
Vandermonde 행렬 122
Wronski의 Test 335
가역행렬 63
거듭 제곱법(Power Method) 148
거리 12
계수 218
계수행렬 34
고유값 126
고유공간 132
고유벡터 126

기본단위벡터 17
기본행렬 66
기본행연산 36
기약 행 사다리꼴(RREF) 37
기저 204
기하적 중복도 277
내적공간 337
노름 12
단사 181
단위벡터 15
기본단위벡터 17
단위행렬 58
닮음 270
대각선행렬 87
대각합 61
대각화가능한 행렬 271
대수적 중복도 277
대수학의 기본정리 128

대칭행렬 89
동차선형연립방정식 29
동형사상 183
반-Hermitian 행렬 310
반대칭행렬 89
반전 99
반전수 99
방향벡터 18
법선벡터 19
벡터 2
벡터공간 326
변환 166
복소공간 304
복소내적공간 340
복소벡터공간 340
부분공간 72
부호화 함수 100
비가역 63
사잇각 15
삼각부등식 16
상등 4
상삼각행렬 90
생성된(spanned) R^n 의 부분공간 74
생성집합 75
생성한다 75
선행변수 44
선형방정식 28
선형변환 167
소행렬식 110
수반동차연립방정식 82
수반행렬 110
스칼라 2
스칼라행렬 87
쌍곡포물면 291
양의 정부호 338
여인자 110
여인자 전개 111
역행렬 63
열 33
열계수 216
열공간 75
영공간 73
영벡터 2
영벡터공간 328
영변환 169
영행렬 57
원뿔곡선 284
유니타리공간 340
유니타리 닮음 312
유니타리 대각화가능 312
유니타리 행렬 311
음벡터 5
이차형식 286
일반화된 고유벡터 363
일반화된 역행렬 299
일차결합 11

선형연립방정식 28
선형연립방정식의 해 29
자명하지 않은 해 81
자명한 해 81
자유변수 44
전사 181
전이행렬 269
전치행렬 60
점과 평면 사이의 거리 22
점도표 357
정규직교기저 237
정규직교벡터 15
정규행렬 315
정사각행렬 33
정사영 21
좌표벡터 245
주대각선성분 33
주축정리 288
직교 15
직교닮음 280
직교대각화가능 280
직교벡터 15
직교보공간 86
직교행렬 177
직선의 방정식 18
짝치환 99
일차독립 76
일차종속 76
층밀림(shear)변환 176
치환(순열) 98
치환행렬 66
켤레복소수 304
켤레전치행렬 308
코시-슈바르츠 부등식 14
크래머 공식 115
타원포물면 291
특성다항식 127
특성방정식 127
특수해 84
특이값 295
특이값분해(SVD) 295
(평면)벡터(vector in plane) 3
평면의 방정식 19
평행 15
포물기둥 291
표준기저 205
표준행렬 171
하삼각행렬 90
합성함수 189
항등변환 169
해공간 73
핵 180

차원 208

차원정리 219

첨가행렬 34

초평면 86

최소제곱직선 234

최소제곱해 234

행렬 33

행렬계산기 153

행렬변환 166

행렬식 101

호치환 99

Blackout Game 142

consistent 29

핵공간 183

행 33

행 사다리꼴(REF) 37

행계수 216

행공간 75

행동치 39

inconsistent 29

isometry 177

Jordan block 355

left singular vector 295

nullity 213

right singular vector 295

– 서울 속의 수학 –



http://matrix.skku.ac.kr/2012-Album/2012-MathInSeoul.html

3. 그림 색인(index)

1장

실베스터	11	이상설의 수리	26
2014 서울 세계수학자대회	23	이상설	
1957년 응용수학 책	25	수학절요, 안종화	

2장

폰노이만	46	선형대수학 with Sage 스마트폰 어플(App)	50
		호머 헐버트	

3장

파인만	71	유일선	96
이상혁	79	아서베커	
조선수학사	86	2014 서울 세계수학자대회 포스터	
일본의 산사수학			

4장

제19차 국제선형대수학회 로고	109	수학자 카드 포스터	133
ATLAST project	114	이춘호	140
[대한수학회-미국수학회 공동학술회의] Combinatorial Matrix Theory	117	장기원	

5장

3색 흑백 게임 시뮬레이터	147	수학박물관	164
수학박물관 로고	163	수학자 족보	

6장

미국수학회 본부 179
2012년 국제수학올림피아드 순위 188
칸트 193
Sage 초기 코드 개발자들 199
2002년 조합적 행렬론 국제학회 202

7장

바이어슈트라스 210
수학자 접시 218
칸토어 2 2 8
힐베르트 243
수학자 책갈피 251
Maths is For Ever 258

8장

다각형 바퀴를 단 자동차와 그에 맞춘 도로 268
선거제도, 수학으로 파헤치다 278
이차형식 교구 294
아인슈타인 303
Issai Schur 314
푸앵카레 317
나폴레옹 323
최윤식 324
홍임식
위대한 수학자들과의 만남

9장

하디 336
드 모르간 345
제12차 국제수학교육대회 349

10장

케메니 363
이임학 366

부록

서울 속의 수학 417

4. 읽을거리

[초기 선형대수학의 역사]

행렬 및 벡터공간을 다루는 선형대수학은 사회의 복잡한 현상을 선형화 과정을 거쳐 선형연립 방정식이라는 단순한 형태의 수학 문제로 바꾼 후 실제로 해결하는 데 결정적으로 기여한다. 이와 같은 이유로 20세기 중반까지 추상적인 고등수학 과목으로만 여겨지던 선형대수학이 현재는 자연-공학-사회계열 분야 학생의 대부분이 배우는 기본 교과목이 되었다. 본 연구에서는 초기 선형대수학의 발전에 기여한 중국, 일본, 그리고 서양의 수학자들에 대하여 다룬다.

선형대수학은 『산수서』, 『구장산술』, 세키 고와, 뫼비우스, 그라스만 실베스터, 케일리 등을 거치면서 비선형적으로 발전해왔다. 우리는 새로 발굴한 내용을 중심으로 초기 선형대수학의 발전과정을 소개한다.

[참고] http://matrix.skku.ac.kr/2013-Album/2013-S-KSME-KSHM-talk-SGLee-v1.pdf

[선형대수학과 구글(Google) 검색엔진]

구글(Google)의 검색엔진은 래리 페이지(Larry Page)와 세르게이 브린(Sergey Brin)이 당시 20대 초반이던 1995년 기존의 검색엔진들이 보여주는 정리되지 않는 결과물에 불만을 가지고 새로운 검색기법을 연구하던 중에 생겨났다. 페이지랭크(PageRank)라고 불리는 이 독특한 기법은 웹사이트가 가지고 있는 키워드나 메타태그에만 의지하던 기존의 방법을 뛰어넘어서 '이 사이트가 링크를 만들어 연결시켜 줄 얼마만큼의 가치를 가지고 있을까?' 라는 기준을 가지고 순수하게 수학적으로 접근하여, 검색된 사이트들의 순위를 매기는 구글 특유의 차별화된 검색방법을 확립하였다. 페이지랭크는 어떤 웹페이지가 다른 웹페이지와 밀접한 관계가 있는지를 결정하고 관련된 구조를 표현하기 위해 하이퍼링크(Hyperlink) 행렬을 만들고 행렬의 가장 큰 고유값을 이용해서 검색에서 가장 근접한 사이트들을 찾아낸다. 구글은 이 과정에서 이 책의 5장에서 배운 Power Method(거듭 제곱법)와 페이지랭크 연산법을 이용하는데, 이를 통하여 학생들은 대학에서 배우는 선형대수학의 기본적인 내용이 생활 속에 널리 이용되고 있음을 알 수 있다. 페이지랭크는 이후 인터넷 검색 엔진 시장에 획기적인 새 패러다임을 제공하였다.

[참고] http://matrix.skku.ac.kr/2012-e-Books/KMS-News-LA-Google-SGLee.pdf

[행렬론(Matrix Theory) 연습문제 답]

고급 선형대수학 학습에서 다루어야 하는 필수적인 문제들을 답안과 함께 제시하였다.

[참고] http://matrix.skku.ac.kr/2010-Album/2010-MT-all-Solution-v1-sglee

[한국 근대수학의 개척자들]



이 책은 한국 수학의 발달 과정에서 핵심적인 역할을 한 수학자를 중심으로, 우리나라 근대수학의 발달 과정을 역사적으로 정리한 책이다. 우리는 이 책에서 한국 수학사 중에서도 현재 우리가 배우고 사용하고 연구하고 있는 근대수학에 집중하여 그 발전에 기여한 주요 개척자들에 대하여 처음으로 그리고 구체적으로 소개한다. 즉, 현재 우리가 다루는 근대수학이 어떤 시기에, 어떤 과정을 거쳐, 누구에 의하여 도입되어 현재의 모습으로 발전하였는지 알아보는 것이다.

우리는 이 책을 통해 '개화기 전통산학에서 근대수학으로 변해가는 시기에 누가 개척자로서의 중요한 기여를 하였을까?', '한국 수학의 근대화 과정에서 일본의 식민지 교육정책은 어떤 영향을 끼쳤을까?' 와 같은 질문에 대한 답을 찾을 수 있을 것이다. 독자들은 한국 근대수학의 역사에 대해 알아보는 동시에 동아시아의 주요 수학자들도 확인하며, 국제수학자대회 서울 개최를 앞둔 21세기 한국 수학의 밝은 미래를 개척하는 꿈을 꿀 수 있을 것이다.

[참고] http://matrix.skku.ac.kr/K-Math-History/index.htm
http://matrix.skku.ac.kr/2008-Album/KJHM-sglee-070824.htm

[서울 속의 수학]

서울을 대표하는 건축물과 그에 담긴 수학적 의미를 주제로 하여 하나의 지도로 완성하였다. 서울을 방문하는 사람들에게 꼭 둘러 볼만한 유용한 코스를 제공한다.

[참고] (모바일 웹) http://matrix.skku.ac.kr/mathinseoul/ ■
(포스터) http://matrix.skku.ac.kr/mathinseoul/Math-In-Seoul-SGLee.pdf

5. 참고문헌

김창근, 송영권, 양영균, 『MATLAB을 이용한 선형대수학』, 교우사, 2003.

김한두, 김향숙 외, 『MATHEMATICA를 이용한 선형대수학』, 교우사, 1999.

신항균, 이상구 외, 『선형대수학과 응용』, 경문사, 2004.

안톤-버스비, 고형준, 서동엽 외, 『최신선형대수』, (주)학술정보, 2004.

이상구, 『현대 선형대수학 with Sage』, 경문사, 2012.

이상구, 김경원, 「모바일 선형대수학 스마트폰 콘텐츠 개발과 활용」, 『韓國數學教育學會誌 시리즈 E 〈數學教育 論文集〉』, 제 27집 제 2호, 2013. 121-134.

이상구, 장지은, 김경원, 「Sage와 GeoGebra를 이용한 선형대수학 개념의 Visual-Dynamic 자료 개발과 활용」, 『韓國數學教育學會誌 시리즈 E 〈數學教育 論文集〉』, 제 27집 제 1호, 2013, 1-17.

H. Anton, R. Busby, Contemporary Linear Algebra, Anton Textbooks Inc., 2003.

Duk-Sun Kim, Sang-Gu Lee, Greg Markowsky, Mobile Sage-Math for Linear Algebra and its Application, Electronic Journal of Mathematics & Technology 4 (2010), No. 3, 1-13.

Kyung-Won Kim, Sang-Gu Lee, Shaowei Sun, Modeling of Mobile Sage and Graphing Calculator, Journal of Modern Education Review 3 (2013), No. 12, 918-925.

Jin Ho Kwak, Sungpyo Hong, Linear Algebra, Birkhäuser, 1997.

Sang-Gu Lee, Kyung-Won Kim, Jae Hwa Lee, Sage matrix calculator and full Sage contents for linear algebra, Korean J. Math. 20 (2013), No. 4, 503-521.

Steven J. Leon, Eugene Herman, Richard Faulkenberry, ATLAST: Computer Exercise for Linear Algebra, Prentice Hall Inc., 1996.

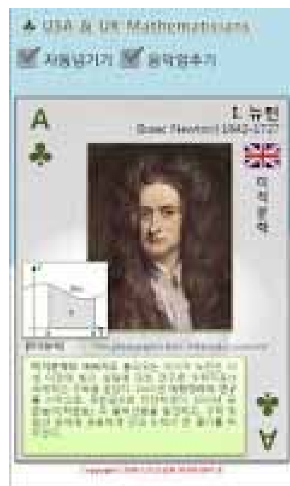
Steven J. Leon, Linear Algebra with Applications, Prentice Hall Inc., 2002.

Gilbert Strang, Linear Algebra and its Application, Thomson Learning Inc., 1988.



6. 관련 사이트

[문제와 풀이] http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/
[동영상 강의] http://matrix.skku.ac.kr/2012-album/2012-LA-Lectures.htm
[CAS] http://matrix.skku.ac.kr/knou-knowls/cla-sage-reference.htm
[Sage 명령어] http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/Appnd/index.htm
[도서관] http://matrix.skku.ac.kr/2012-e-Books/index.htm
[한국인 수학자(스마트폰 어플)]
https://play.google.com/store/apps/details?id=korean.mathematicians.ko
[아시아인 수학자(스마트폰 어플)]
http://www.1mobile.com/asia-mathematicians-ko-530538.html
[유럽인 수학자(스마트폰 어플)]
https://play.google.com/store/apps/details?id=eu.mathematicians.ko
[미영국인 수학자(스마트폰 어플)]
http://www.appbrain.com/app/미영국인_수학자/usauk.mathematicians.ko





7. 기출문제(임용고사 포함)

[1990] 다음 행렬식 값은?

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

① 21 ② -21 ③ 42 ④ -42

<해>

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -14 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} -6 & -14 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = -6 \cdot 7 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -42$$ 답 ④

[유사문제] 다음 방정식의 해는?

$$\begin{vmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = 0$$

① 3, 4, 2 ② 3, −4, −2 ③ 3, 4, −2 ④ −3, 4, −2

[1993] 직교 좌표평면 위의 임의의 점 $P(x, y)$에서 직선 $y = mx\ (x \neq 0)$에 내린 수선의 발을 $P'(x', y')$이라고 할 때, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$을 만족하는 일차변환의 행렬 A는?

① $\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} m & 1 \\ m^2 & m \end{pmatrix}$ ② $\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$

③ $\frac{1}{m^2+2}\begin{pmatrix} 1 & m^2 \\ -m^2 & m \end{pmatrix}$ ④ $\frac{1}{m^2+2}\begin{pmatrix} -1 & m \\ m^2 & m \end{pmatrix}$

<해>

$P(x, y)$를 $P(x_0, y_0)$라 두자.

$y = mx$에 수직이고 $P(x_0, y_0)$를 지나는 직선은 $y = -\frac{1}{m}x + \frac{x_0}{m} + y_0$이다.

이때, $P'(x', y')$는 $y = mx$와 $y = -\frac{1}{m}x + \frac{x_0}{m} + y_0$의 교점이므로 연립하여 교점을 구한다. 즉, $mx = -\frac{1}{m}x + \frac{x_0}{m} + y_0$에서

$$x' = \frac{x_0}{m^2+1} + \frac{my_0}{m^2+1},\quad y' = mx = \frac{mx_0}{m^2+1} + \frac{m^2y_0}{m^2+1}$$

그러므로 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{m^2+1} & \frac{m}{m^2+1} \\ \frac{m}{m^2+1} & \frac{m^2}{m^2+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$ 답 ②

[1994] 점 (x, y)를 점 (ry, rx)로 옮기는 일차변환 f와 점 (x, y)를 점 $(x\sin\theta + y\cos\theta,\ x\cos\theta - y\sin\theta)$로 옮기는 일차변화 g에 의한 합성변화 $g \circ f$를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은?

① $2r(\cos\theta + \sin\theta)$ ② $2r(\cos\theta - \sin\theta)$
③ $r\sin\theta$ ④ $2r\cos\theta$

<해>

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ry \\ rx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sin\theta + y\cos\theta \\ x\cos\theta - y\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이므로

$$(g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 선분의 합은 $2r\cos\theta$이다. 답 ④

[1996] 3×3 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬을 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$라 할 때, $a_{21} + a_{32}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2

<해>

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5-6 = -1$$

$a_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $a_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\therefore\ a_{21} + a_{32} = 2$ 답 ④

[유사문제] 다음과 같이 정의된 행렬 A의 역행렬이 존재하기 위한 조건은?

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

① $x \neq 1, 3$ ② $x \neq -1, 3$ ③ $x \neq 1, -3$ ④ $x \neq -1, -3$

[1997] 실벡터 공간 R^3에서의 벡터 a에 대하여 선형사상

$$T(\mathrm{p}) = \mathrm{a} \times \mathrm{p} + (\mathrm{p} \cdot \mathrm{a})\mathrm{a} \quad (\mathrm{p} \in R^3)$$

가 정의되었다. 벡터 a의 크기가 $\sqrt{2}$ 일 때, T의 고유값을 구하고, T의 고유값은 그것뿐임을 보이시오. 단 u×v와 u • v는 각각 벡터 u, v의 외적(cross product)과 내적(inner product)을 나타낸다. (5점)

[풀이]

$T(\mathrm{a}) = \mathrm{a} \times \mathrm{a} + (\mathrm{a} \cdot \mathrm{a})\mathrm{a} = |\mathrm{a}|^2 \mathrm{a} = 2\mathrm{a}$ 이므로

a는 2를 고유값으로 갖는 고유벡터 ································· 2점

(단, a가 고유벡터임을 인지하여 입증하려고 시도했으면 부분점수 가능)

T 가 2 이외의 고유값을 가지면 그 고유벡터는 a와 수직

즉, p 를 그 이외의 고유벡터라 하면

$\mathrm{p} \cdot \mathrm{a} = 0$, $T(\mathrm{p}) = \lambda \mathrm{p}$ ··· 3점

$T(\mathrm{p}) = \mathrm{a} \times \mathrm{p} = \lambda \mathrm{p}$ 에서

$0 = (\mathrm{a} \times \mathrm{p}) \cdot \mathrm{p} = T(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{p} = \lambda \mathrm{p} \cdot \mathrm{p} = \lambda |\mathrm{p}|^2$

이므로, $\lambda = 0$ ($\because \mathrm{p} \neq \mathbf{0}$). 단, $\mathbf{0}$는 영벡터이다. ·························· 4점

이제, $\mathrm{a} \times \mathrm{p} = \mathbf{0}$.

따라서 벡터 a, p 사이각은 0 (또는 π)이다.

그러나 $\mathrm{p} \cdot \mathrm{a} = 0$에서 벡터 a, p의 사이각은 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 모순. ············ 5점 ■

[1998] 2차원 아핀 공간 A^2에서 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$인 $\triangle ABC$를 $A'(1,-2)$, $B'(2,0)$, $C'(3,-1)$인 $\triangle A'B'C'$로 옮기는 아핀변환을 구하시오. (5점)

[풀이]

2차원 아핀공간 A^2 의 변환식은

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$꼴로서 일차변환과 평행이동의 합성이다.

주어진 좌표를 위의 식에 대입하면

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

을 풀면 $\alpha=1,\ \beta=2,\ a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=-1$을 얻는다.

따라서, 아핀변환은

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ■

[1999] $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되도록 적당한 정칙행렬 P를 사용하여, 행렬

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

를 대각화하시오. (6점)

[풀이]

행렬 A의 고유값을 λ라 하면

특성방정식 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+5 & -9 \\ 6 & \lambda-10 \end{vmatrix} = 0$에서 $(\lambda+5)(\lambda-10)+54=0$이다.

$\therefore\ \lambda^2-5\lambda+4=0$이고 고유값은 $\lambda=1$ 또는 $\lambda=4$이다.

$\lambda=1$일 때 고유벡터를 p_1, $\lambda=4$일 때 고유벡터를 p_2라 하면

i) $\lambda=-1$일 때, $\mathrm{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 이라 하면

$\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $2x_1-3x_2=0$ 이고 $\therefore \mathrm{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii) $\lambda=4$일 때, $\mathrm{p}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 이라 하면

$\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $y_1-y_2=0$ 이고 $\therefore \mathrm{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) ii)에서 $P = \begin{pmatrix} 3\ 1 \\ 2\ 1 \end{pmatrix}$을 얻고 $|P| \neq 0$이므로 정칙행렬이다.

따라서 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 0\ 4 \end{pmatrix}$ 이다. ■

[2000] 3×3행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 A^{10}의 고유값(eigenvalues)과 고유벡터

(eigenvectors)를 모두 구하시오. (5점)

[풀이]

3차 정사각행렬 A의 고유값이 λ이고 이에 대응하는 고유벡터가 v (v$\neq 0$)이라 하면 A^{10}의 고유값은 λ^{10}이고 이에 대응하는 고유벡터는 그대로 v이므로 먼저 주어진 행렬 A의 고유값과 고유벡터를 구하자.

$A\mathrm{v} = \lambda \mathrm{v}$에서

$(\lambda I - A)\mathrm{v} = 0$, $\mathrm{v} \neq 0$이므로 고유방정식은

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$이다.

$\therefore\ (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\therefore\ \lambda = 1$ 또는 2 또는 3

고유값을 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$이라 하고 이에 대응하는 고유벡터를 각각 v_1, v_2, v_3이라 하면

$\lambda_1 = 1$일 때 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $x_2 = x_3 = 0$이다.

$\therefore\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1,\ x_1 \neq 0 \quad \therefore \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$일 때 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $y_1 = y_3 = 0$이다.

$\therefore\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_2,\ y_2 \neq 0 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 3$일 때 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $z_3 = 2z_1$, $z_2 = 0$이다.

$\therefore\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 2z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} z_1,\ z_1 \neq 0 \quad \therefore v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x,\ \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y,\ \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} z$ (x, y, z는 0 아닌 임의의 스칼라)

따라서 A^{10} 의 고유값은 1^{10}, 2^{10}, 3^{10}이고 이에 대응하는 고유벡터는 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}y$, $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}z$, (x, y, z는 0 아닌 임의의 스칼라)이다. ■

[2000] 미분방정식 $X' = AX$, $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$의 일반해 $X = X(t)$를 구하시오. (5점)

[풀이]

$X' = AX$의 특수해는 $X = e^{\lambda t}\mathrm{v}$ (v는 고유벡터) 꼴이므로 $X' = \lambda e^{\lambda t}\mathrm{v}$ 를 $X' = AX$에 대입하면 $(\lambda I - A)\mathrm{v}e^{\lambda t} = 0$, $\mathrm{v} \neq 0$이고, $e^{\lambda t} \neq 0$이므로

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda - 1 & -2\\ -4 & \lambda - 3\end{vmatrix} = 0$이고 $(\lambda - 1)(\lambda - 3) - 8 = 0$ 이다.

$\therefore$ $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$에서 $\lambda = -1$ 또는 $\lambda = 5$

i) $\lambda = -1$일 때, 고유벡터를 v_1이라 하면

$$\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{에서 } x_1 + x_2 = 0\text{으로부터 } \mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

ii) $\lambda = 5$일 때, 고유벡터를 v_2이라 하면

$$\begin{pmatrix}4 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{에서 } 4x_1 - 2x_2 = 0\text{으로부터 } \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

따라서 주어진 미분방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$X(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

즉, $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} \\ y(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{5t} \end{cases}$ ■

[2001] R^2의 두 기저(basis), $\alpha = < \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 >$, $\beta = < \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2 >$에 대하여

$\mathrm{v}_1 = (0,1)$, $\mathrm{v}_2 = (1,0)$, $\mathrm{u}_1 = (1,-2)$, $\mathrm{u}_2 = (2,3)$일 때,

다음 물음에 답하시오. (총 4점)

1. 선형변환 $f : R^2 \to R^2$, $f(\mathrm{v}_1) = \mathrm{u}_1$, $f(\mathrm{v}_2) = \mathrm{u}_2$를 나타내는 행렬 A를 구하시오. (2점)

[풀이]

$A\mathrm{v}_1^t = \mathrm{u}_1^t,\ A\mathrm{v}_2^t = \mathrm{u}_2^t$ 이므로

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 이어서

$A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}$

$A = \begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$ 이다.

따라서, $A = \begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$ ■

2. 이 선형변환에 의하여 세 점 $P(-1,0)$, $Q(1,-1)$, $R(2,3)$이 옮겨지는 점을 각각 P', Q', R'이라 할 때, $\triangle P'Q'R'$의 넓이를 구하시오. (2점)

[풀이]

$P'^t = AP^t,\ Q'^t = AQ^t,\ R'^t = AR^t$ 이므로

$P'^t = \begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, $Q'^t = \begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$R'^t = \begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ 이다.

$\therefore\ P' = (-2,-3),\ Q' = (1,\ 5),\ R' = (7,\ 0)$

이때, $\overline{P'R'} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$,

$\overleftrightarrow{P'R'}: x - 3y - 7 = 0$ 이므로

Q' 에서 $P'R'$ 까지 거리는 $\dfrac{|1-15-7|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{21}{\sqrt{10}}$ 이어서

$\triangle P'Q'R'$ 의 면적은 $\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{10}\times\dfrac{21}{\sqrt{10}} = \dfrac{63}{2}$ 이다.

따라서 $\triangle P'Q'R'$ 의 면적은 $\dfrac{63}{2}$ 이다.

참고 $\triangle P'Q'R' = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}-2&1&7&-2\\-3&5&0&-3\end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}|-7-35-21| = \dfrac{63}{2}$ ■

[2002] V와 W가 n차원 실벡터 공간이라 하자. 선형사상 $L: V \rightarrow W$에 대하여

$\ker L = \{0\}$이면 L은 동형사상(isomorphism)임을 보이시오. (5점)

[풀이]

선형사상 L이 전단사 선형사상임을 보이면 된다.

$L(\mathrm{u}) = L(\mathrm{v})$, u, v $\in V$이면 $L(\mathrm{u}-\mathrm{v}) = 0$이고 $\mathrm{Ker}L = \{0\}$이므로 $\mathrm{u}-\mathrm{v}=0$이어서 $\mathrm{u}=\mathrm{v}$이다.

$\therefore L(\mathrm{u}) = L(\mathrm{v})$, u, v$\in V$ 이면 $\mathrm{u}=\mathrm{v}$

이므로 선형사상 L은 단사이다.

또, $\dim V = \dim W = n$과

조건 $\mathrm{Ker}L = \{0\}$에서 $\dim(\mathrm{Ker}L) = 0$이어서 차원의 공식

$\dim V = \dim(\mathrm{Im}L) + \dim(\mathrm{Ker}L)$을 이용하면

$\dim(\mathrm{Im}L) = n = \dim W$ 에 의해서 선형사상 L은 전사 선형사상이다. 따라서 선형사상 L은 단사이고 전사인 선형사상이므로 동형사상이다. ■

[2003] 실수체 R 위의 벡터공간 V에 대하여 W_1, W_2를 V의 부분공간이라 하자. $V = W_1 + W_2$일 때, 임의의 $\mathrm{v} \in V$에 대하여 $\mathrm{v} = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2$ ($\mathrm{w}_1 \in W_1$, $\mathrm{w}_2 \in W_2$)로 유일하게 표현될 필요충분조건은 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$임을 증명하시오. (5점)

[풀이] $V = W_1 + W_2$ 이라 가정하고, 임의의 $\mathrm{v} \in V$ 에 대하여 $\mathrm{v} = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2$ ($\mathrm{w}_1 \in W_1, \mathrm{w}_2 \in W_2$)로 유일하게 표현된다고 하자. (즉, if $\mathrm{w}+\mathrm{r} = \mathrm{v} = \mathrm{s}+\mathrm{t}$, $(\mathrm{w},\mathrm{s} \in W_1,\ \mathrm{r},\mathrm{t} \in W_2)$ then $\mathrm{w}=\mathrm{r}$ and $\mathrm{s}=\mathrm{t}$)

Let $\mathrm{v} \in W_1 \cap W_2 \subset W_1 + W_2 = V$. 그러면 $\exists\, \mathrm{w}_1 \in W_1$ and $\exists\, \mathrm{w}_2 \in W_2$ such that $\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = \mathrm{v}$. 따라서 $\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in W_1$, $\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in W_2$ $(\because \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = \mathrm{v} \in W_1 \cap W_2)$.

$\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = (\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2) + 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \\ \mathrm{w}_2 = 0 \end{cases}$ $\left(\because \begin{cases} \mathrm{w}_1 \in W_1, \mathrm{w}_2 \in W_2 \\ \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in W_1, 0 \in W_2 \end{cases}\right.$ and hypothesis)

$\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = 0 + (\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{w}_1 = 0 \\ \mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \end{cases}$ $\left(\because \begin{cases} \mathrm{w}_1 \in W_1, \mathrm{w}_2 \in W_2 \\ 0 \in W_1, \mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 \in W_2 \end{cases}\right.$ and hypothesis)

$\therefore\ w_1 = 0\ ,\ w_2 = 0$

$\Rightarrow v = w_1 + w_2 = 0$

$\therefore W_1 \cap W_2 = \{0\}$ □

$(\Leftarrow)$ Suppose $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. If $v = w_1 + w_2$ and $v = w_3 + w_4$ ($w_1, w_3 \in W_1$, $w_2, w_4 \in W_2$),

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 - w_3 \in W_1,\ w_4 - w_2 \in W_2 \\ w_1 - w_3 = w_4 - w_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow w_1 - w_3 = w_4 - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$\Rightarrow w_1 - w_3 = w_2 - w_4 = 0$

$\Rightarrow w_1 = w_3\ ,\ w_2 = w_4$ ($\because$ $w_1 - w_3 = 0$, $w_2 - w_4 = 0$)

$\therefore$ $v = w_1 + w_2$ (for some $w_1 \in W_1$ and $w_2 \in W_2$) 로 유일하게 표현된다. □ ■

[2004] 다음 행렬의 고유값(eigenvalue)와 고유공간(eigenspace)을 구하시오. (총 5점)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[풀이] 주어진 3차 정사각행렬을 A라 할 때, A의 고유값을 구하기 위해 다음 방정식의 해를 구하자.

$0 = \det(A - tE) = (1-t)(2-t)^2$

따라서 A의 고유값은 $t = 1$ 또는 $t = 2$이다. 이제 고유값 $t = 1$에 대응되는 고유공간은

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (A - 1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

고유값 $t = 2$에 대응되는 고유공간은

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (A - 2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$ ■

[2005] 선형사상 $T: R^3 \to R^3$는 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$에 의한 곱이다. 즉, $\mathrm{x} \in R^3$에 대하여 $T\mathrm{x} = A\mathrm{x}$이다. T의 핵(kernel)의 차원(dimension)과 T의 상(image)의 차원을 각각 구하시오. (5점)

[풀이] (i) 행렬의 기본변환에 의해 다음과 같은 동치관계를 얻을 수 있다.

가우스 소거법으로, $B = REF(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\therefore \mathrm{rank}(A) = 2$

따라서 $\dim(\ \mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 2$이다.

(ii) $\dim R^3 = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim\ \mathrm{Im}(T)$라는 사실을 이용하면

$\dim(\ \mathrm{Ker}(T)) = \dim(R^3) - \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 - 2 = 1$이다. ■

[2006] 실수 집합을 R이라 하자. 선형변환(linear transformation) $L: R^n \to R^m$은 R^n의 임의의 두 점 x, y (x≠ y)를 잇는 선분 $\{(1-t)\mathrm{x}+t\mathrm{y} \mid 0 \le t \le 1\}$을 R^m에 포함되는 선분 (또는 점)으로 보내는 것을 보이시오. [4점]

[풀이] $L((1-t)\mathrm{x}+t\mathrm{y}) = (1-t)L(\mathrm{x}) + t\,L(\mathrm{y})\ (t \in \mathbb{R})$이므로 $E = \{(1-t)\mathrm{x}+t\mathrm{y} \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$이라 할 때 L의 치역은 $L(E) = \{(1-t)\mathrm{L}(\mathrm{x}) + t\,\mathrm{L}(\mathrm{y}) \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$이다.

(i) $L(\mathrm{x}) = L(\mathrm{y})$인 경우, $L(E)$는 한 점 집합이다.

(ii) $L(\mathrm{x}) \neq L(\mathrm{y})$인 경우, $L(E)$는 $L(\mathrm{x})$와 $L(\mathrm{y})$를 잇는 선분이다. ■

[2007] 행렬 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$가 대각화가능함을 보이고, $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되는 행렬 P를 하나 구하시오.

[풀이] A의 특성다항식은

$$P_A(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - t \end{vmatrix} = t^2 + (-2\cos\theta)t + 1$$

따라서 고유값은 $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$, $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$

(i) $\theta = 2n\pi \ (n \in Z)$인 경우,

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$는 A의 고유값이다. 이때 일차독립인 두 고유벡터는 $\mathrm{v}_1 = (1,0)^t$, $\mathrm{v}_2 = (0,1)^t$ 이다. 따라서 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이고, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$가 되고 A는 대각화가능이다.

(ii) $\theta = (2n-1)\pi \ (n \in Z)$인 경우,

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$는 A의 고유값이다. 이때 일차독립인 두 고유벡터는 $\mathrm{v}_1 = (1,0)^t$, $\mathrm{v}_2 = (0,1)^t$ 이다. 따라서 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이고, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$가 되고 A는 대각화가능이다.

(iii) $\theta \neq k\pi \ (\forall k \in Z)$인 경우,

$\lambda_1 \neq \lambda_2$가 되어 A는 서로 다른 두 고유값 λ_1과 λ_2를 갖는다. 각각에 대응되는 고유벡터는 $\mathrm{v}_1 = (1,-i)^t$, $\mathrm{v}_2 = (1,i)^t$이고 v_1, v_2는 일차독립이다. 따라서 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$이고

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{pmatrix}$가 되어 A는 대각화가능이다. ■

[2008] 실수체 R 위의 벡터공간

$$P_2 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in R\}$$

에 대하여 선형변환(linear transformation) $T: P_2 \to P_2$가 다음을 만족한다고 하자.

$T(1+x) = 1 + x^2$

$T(x+x^2) = x - x^2$

$T(1+x^2) = 1 + x + x^2$

이 때, $T(4+2x+3x^2)$ 을 구하시오. [4점]

<해>

$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$이라 두면, $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{2}$이므로

$4 + 2x + 3x^2 = \frac{3}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(x+x^2) + \frac{5}{2}(1+x^2)$이다.

$T(4+2x+3x^2) = \frac{3}{2}T(1+x) + \frac{1}{2}T(x+x^2) + \frac{5}{2}T(1+x^2)$

[2009] 유한차원 내적공간 V의 부분공간 $W(W \neq V)$에 대하여 선형사상 P를 V에서 W로 의 정사영(orthogonal projection)이라 하자. P에 관한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $Im(P) = W$ 이다.

② $Ker(P) \cap W = \{0\}$이다.

③ 임의의 $w \in W$에 대하여 $P(w) = w$ 이다.

④ 임의의 $v \in V$에 대하여 $P(P(v)) = P(v)$ 이다.

⑤ P를 나타내는 행렬은 가역행렬이다.

<해>

P는 사영이므로 0 아닌 $v(\in V)$가 존재해서 $P(v) = 0$이다.

따라서 P는 $1-1$이 아니다. 그러므로 P는 가역행렬이 아니다. 답⑤

15. 각 성분이 실수인 4×4 행렬 A의 고윳값(eigenvalue)이 $1, -1, 2, 4$일 때, 행렬 A의 특징으로 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [1.5점]

<보 기>

ㄱ. A의 행렬식(determinant)은 -8이다.

ㄴ. A의 자취(trace)는 6이다.

ㄷ. A는 대칭행렬(symmetric matrix)이다.

ㄹ. A의 계수(rank)는 4이다.

① ㄱ, ㄴ　　② ㄴ, ㄷ　　③ ㄷ, ㄹ

④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　　⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

정답 : 15 - ④

[2010] 실수체 R 위에서 정의된 벡터공간 R^3에 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. 유리수 전체의 집합 Q에 대하여 Q^3는 R^3의 부분공간이다.

ㄴ. R^3의 부분공간 $U=\{(x, y, z) \mid z=x+5y\}$에 대하여 R^3가 U와 W의 직합(direct sum) $U \oplus W$와 같게 되는 R^3의 부분공간 W가 존재한다.

ㄷ. 선형사상 $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z)=(x-y,\ 2y,\ x-3z)$에 대하여 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 차원은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

<해>

ㄱ. $(1,1,1) \in Q^3$라 하자. 이 때, 스칼라 $\sqrt{2} \in R$에 대하여

$$\sqrt{2}(1,1,1)=(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin Q^3$$

즉, $v \in Q^3$, $k \in R$가 존재해서 $kv \notin Q^3$이므로 Q^3는 R^3의 부분공간이 아니다.

15. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

와 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 선형사상 $L: V \rightarrow V$를

$$L(B)=AB-BA$$

로 정의하자. V의 부분공간(subspace)

$$\operatorname{im}(L)=\{L(B) \mid B \in V\}$$

의 차원은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

정답: ③

16. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 정사각행렬(square matrix)에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 정칙행렬은 대각화가능(diagonalizable)하다.

ㄴ. 행렬 A의 전치행렬이 대각화가능하면 A는 대각화가능하다.

ㄷ. 선형사상 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, x+y, y+z)$의 $\mathbb{R}^3$의 표준기저(standard basis)에 대한 행렬은 대각화가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

정답: ②

[2011년]

14. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^4$ 의 서로 다른 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 로 생성되는 벡터공간

$$V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 벡터공간 V 와 $\mathbb{R}^n$ 이 동형(isomorphic)이 되는 자연수 n 이 존재한다.

ㄴ. 집합 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$가 V 의 기저(basis)인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.

ㄷ. $\dim V = 2$인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답: ③

15. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

와 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 선형사상 $L : V \rightarrow V$ 를

$$L(B) = AB - BA$$

로 정의하자. V 의 부분공간(subspace)

$$\mathrm{im}(L) = \{L(B) \mid B \in V\}$$

의 차원은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

정답: ③

[문제] V와 W가 n차원 실벡터 공간이라 하자. 선형사상 $L: V \to W$에 대하여 $\ker L = \{0\}$이면 L은 동형사상(Isomorphism)임을 보이시오.

[풀이]

선형사상 L이 동형임을 보이기 위해 $1-1$이고 전사임을 보이자.

(1) $v,\ w \in V$에 대하여 $L(v) = L(w)$라 할 때

$0 = L(v) - L(W)$

$= L(v-w)$

$\Rightarrow v-w \in \ker L = \{0\}$

$\Rightarrow v-w = 0$

$\Rightarrow v = w$

따라서 L은 단사이다.

(2) (방법 1)

$\dim(\ker L) = 0$, $\dim V = n$이므로 $\dim(\ker L) + \dim(L(V)) = \dim V$

라는 사실에서 $\dim(L(V)) = n$이다.

따라서 $L(V)$는 W의 부분공간이고 $\dim(L(V)) = n = \dim(W)$이므로

$L(V) = W$이다.

즉 L은 전사함수이다. ■

[문제] Find bases for $R(A)$ and $N(A)$ of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

Also find a basis for $C(A)$ by finding a basis for $R(A^T)$.

[풀이]

(1) Find basis for $R(A)$

By Gaussian Elimination on A, we get a REF form $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\therefore$ A basis for R(A) : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ($\because R(A)=R(U)$)

(2) Find a basis for $N(A)$

The equation $U\mathrm{x}=0$ takes the following system of equations.

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad -2x_4 + 3x_5 = 0 \\ \quad x_2 \quad - x_4 \quad\quad = 0. \\ \quad\quad x_3 + x_4 \quad\quad = 0 \end{cases}$$

The basic variables are x_1, x_2, x_3 and the free variables are x_4, x_5. Let $s = x_4, t = x_5$.

Then $\mathrm{x}= s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\forall\, s,t \in R)$ $\therefore$ A basis for $N(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

($\because N(A)=N(U)$)

(3) Find a bases for $C(A)$ by finding a basis for $R(A^T)$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

By Gaussian Elimination on A^T, we get the a form $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

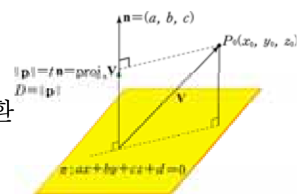
$\therefore$ A basis for $C(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ($\because C(A)=R(A^T)=R(U)$) . ■

<샘플 기말고사>

var('a,b,c,d') # 변수정의 eq1=3*a+3*b==12 # equation1 정의 eq2=5*a+2*b==13 # equation2 정의 solve([eq1, eq2], a,b) # Solve 연립방정식 A=matrix(QQ, 3, 3, [3, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 4]); # 행렬정의 A.echelon_form() # RREF A.inverse() # 역행렬 A.det() # 행렬식 A.adjoint() # adjoint matrix A.eigenvalues() # 고유값 A.eigenvectors_right() # 고유벡터 A.rank() # A의 계수 A.right_nullity() # A의 nullity P,L,U=A.LU() # LU분해 # (P: Permutation행렬 / L,U:삼각행렬)	vector([3, 1, 2]) # 벡터정의 var('x, y') # 변수정의 f = 7*x^2 + 4*x*y + 4*y^2-23 implicit_plot(f, (x, -10, 10), (y, -10, 10)) # 타원 Plot plot3d(y^2+1-x^3-x, (x, -pi, pi), (y, -pi, pi)) # 3차원 Plot var('t') # 변수정의 (매개변수방정식) x=2+2*t y=-3*t-2 parametric_plot((x,y), (t, -10, 10), rgbcolor='red') # 직선 Plot A.jordan_form() #A의 Jordan 표준형을 구한다 〈Sage Linear Algebra 입문 명령어 일부〉

I. (2점 x 17 = 34점) 맞으면(T) or 틀리면(F) 표 하시오. 여기서 $A \in M_{n\times n}(R)$, $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in R^n$ 이다.

1. (T) 행렬 A의 열벡터가 모두 정규직교벡터이면, $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(AA^T)$이다.
2. (T) R^n의 순서기저 $\alpha = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n\}$에 대한 x의 좌표벡터 $[\mathrm{x}]_\alpha$는 항상 유일하다.
3. (T) $S = \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\}$가 R^n의 기저이고 A가 n차의 가역행렬이면 $\{A\mathrm{x}_1, \ldots, A\mathrm{x}_n\}$도 R^n의 기저이다.
4. (T) $n \times n$ 행렬 A가 가역이고 $A^{-1} = A^T$이면 A의 열벡터가 R^n의 정규직교기저를 이룬다.
5. (F) $\{(1, 2), (0, 1), (2, 1)\}$는 R^2의 기저이다.
6. (T) $S = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$는 R^3의 기저이다.
7. (F) 변환 $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + 1, -x_1 + x_2, x_3)$이 선형변환이다.
8. (T) $\mathrm{p} = \mathrm{proj}_{\mathrm{n}}\mathrm{v} = t\mathrm{n} = \dfrac{\mathrm{v}\cdot\mathrm{n}}{\mathrm{n}\cdot\mathrm{n}}\mathrm{n}$



9. (T) 선형변환 $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1x_1+3x_4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3 \\ 2x_1+x_2 \\ 3x_1-x_2-x_4 \end{bmatrix}$ 의 표준행렬이 $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 이고

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{REF} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ 이므로 $\ker T = \{(0,0,0,0)\} = \{\mathbf{0}\}$ 이다.

10. (F) R^n 상에서 한 원점을 지나는 직선 위로의 정사영 $T(\mathbf{x}) = \mathrm{proj}_{<\mathbf{a}>}\mathbf{x} = P\mathbf{x}$ 에 대응하는 표준행렬의 계수(rank)는 2이다.

11. (T) 벡터들의 집합 $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$은 R^3의 기저이다.

12. (T) 동차 연립방정식 $\begin{cases} 9x_1-7x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+7x_3-5x_4=0 \end{cases}$ 의 해공간의 차원은 2이다.

13. (F) 만일 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$가 R^{n+2}의 영 아닌 벡터라면 $\dim(\mathbf{a}^{\perp}) = n$ 이다.

14. (T) 만일 A가 $m \times n$ 행렬이고, rank가 k라면, $\dim(\mathrm{row}(A^TA)) = k$, $\dim(\mathrm{row}(AA^T)) = k$ 이다.

15. (T) $T_1(x_1, x_2) = (3x_1+x_2, x_1-2x_2)$, $T_2(x_1, x_2) = (-x_1, 5x_1+x_2)$ 의 표준행렬은 각각

$[T_1] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $[T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

16. (T) R^3의 두 순서기저 $\epsilon = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $\beta = \{(1,1,1), (1,2,0), (0,2,-3)\}$에 대하여 $[\mathbf{x}]_\epsilon = P[\mathbf{x}]_\beta$와 $[\mathbf{x}]_\beta = P^{-1}[\mathbf{x}]_\epsilon$인 관계가 있다. 그럼 전이행렬 사이의 관계는 $([I]_\beta^\epsilon)^{-1} = [I]_\epsilon^\beta$ 이다.

17. (F) R^3의 부분공간인 평면 $x+2y+3z=0$의 차원은 1이다.

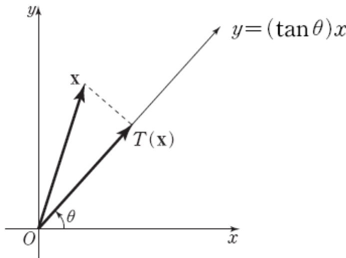
II. (3점x 4= 12점) State or Define

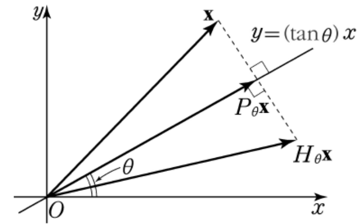
아래 중 본인에 맞는 난이도의 개념 4개를 골라 본인이 이해한 대로 아래 빈 공간에 간결 명확하게 서술하여라.

[부분공간], [2 step 부분공간 test], [1차 결합], [1차 결합들의 집합(U 의 span)], [1차 독립 (Linearly independence)], [1차 종속 (Linearly dependence)], [Vector공간], [Vector 공간의 기저 (basis)], [Vector 공간의 차원 (dimension)], [행렬의 행공간(row space)], [행렬의 계수 (rank)], [T 의 핵(kernel)], [층밀림(shear) 변환], [Schur 정리], [동형사상(Isomorphism)], [Jordan 표준형],

III. (3pt x 10 = 30pt) Find or Explain:

1. (Mid) 선형변환(선형연산자) $T\ : R^2 \to R^2$를 R^2상의 임의의 벡터 x를 x축과 이루는 각이 θ인 원점을 지나는 직선에 정사영시키는 정사영변환으로 정의하자. 그리고 주어진 변환 T에 대응하는 표준행렬을 P_θ라 하면, 아래 그림에서 보듯이 아래 관계 $P_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x})$ <방향은 같고 길이는 절반>를 갖는다. 따라서 위에서 구한 대칭이동의 행렬표현 $H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$를 이용하여 P_θ를 구하여라.





[그림] 기울기가 θ인 직선에 대한 대칭이동과 정사영변환과의 관계

(Sol) $$P_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x})$$ =〉

$$P_\theta \mathrm{x} = \frac{1}{2}H_\theta \mathrm{x} + \frac{1}{2}\mathrm{x} = \frac{1}{2}H_\theta \mathrm{x} + \frac{1}{2}I\mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta + I)\ \mathrm{x}$$

=〉 $$P_\theta = \frac{1}{2}(H_\theta + I) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

■

2. 임의의 벡터 $\mathrm{x} \in R^2$에 대하여 원점을 지나고 x축과 이루는 각이 θ인 직선에 정사영시키는 변환 $T\ :\ R^2 \to R^2$에 대하여

$\theta = \frac{\pi}{3}$일 때, $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$의 이미지 $T(\mathrm{x})$를 구하여라.

Ans $P_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta \mathrm{x} - \mathrm{x})$ $\Rightarrow P_\theta \mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta \mathrm{x} + \mathrm{x}) \Rightarrow P_\theta \mathrm{x} = \frac{1}{2}(H_\theta + I)\mathrm{x}$

$$P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \text{ where } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ at } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ P_{\frac{\pi}{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.433 \\ 0.433 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} 1+3\sqrt{3} \\ 9+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

■

3. 선형변환 $T(x, y, z) = (x+y, y+z, z+x)$의 (표준기저에 대한 행렬표현) 표준행렬 $[T]$를 구하여라.

Ans $T(e_1) = (1,0,1)$, $T(e_2) = (1,1,0)$, $T(e_3) = (0, 1, 1)$ ∴

$$[T] = [\,T(e_1) : T(e_2) : T(e_3)\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 행렬 $\begin{bmatrix} b-a & a+b \\ b+a & a-b \end{bmatrix}$이 직교행렬이면 a, b는 어떤 조건을 만족해야 하는가?

Ans $\begin{bmatrix} b-a & a+b \\ b+a & a-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-a & b+a \\ a+b & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a^2+b^2) & 0 \\ 0 & 2(a^2+b^2) \end{bmatrix} = I$

그러므로 $a^2+b^2 = 0.5$이어야 한다.

■

5. 표준기저를 이용하여 다음 선형변환의 표준행렬 $[T]$를 구하여라.

$T(x, y, z) = (8x+11y-231z, 511x+8y+1z, -18x+731y-z)$

Ans $T(x, y, z) = (8x+11y-231z, 511x+8y+1z, -18x+731y-z)$

$T(e_1) = (8, 511, -18)$,
$T(e_2) = (11, 8, 731)$,
$T(e_3) = (-231, 1, -1)$

$$\therefore\ [T] = \begin{bmatrix} 8 & 11 & -231 \\ 511 & 8 & 1 \\ -18 & 731 & -1 \end{bmatrix}$$ ■

6. 벡터가 $x = (1, 3, 0, 4)$, $a = (1, 0, 2, -1)$ 일 때 x의 span{a}=< a> 위로의 정사영

$$\text{proj}_{<a>}x = \frac{1}{\|a\|^2} a a^T x = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$ 을 이용하여 선형변환

$T(x) = \text{proj}_{<a>}x$의 표준행렬 P를 구하여라.

Ans 편의상 아래에 나오는 x, a를 모두 열벡터로 취급하면,

$T(\mathrm{x}) = \mathrm{proj}_{<\mathrm{a}>}\mathrm{x} = P\mathrm{x}$

$$P = \frac{1}{\mathrm{a}^T\mathrm{a}}\mathrm{a}\mathrm{a}^T = \frac{1}{1^2+2^2+(-1)^2}\begin{bmatrix}1\\0\\2\\-1\end{bmatrix}[1\ 0\ 2\ -1] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&0&0&0\\2&0&4&-2\\-1&0&-2&1\end{bmatrix}$$ ■

7. 선형변환 $T : R^2 \to R^2$는 우선 벡터를 2배로 확대하고, $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 뒤에, x축으로 직교사영(정사형)시키는 변환이다. 이 변환의 행렬표현은?

Ans $T : R^2 \to R^2$는 우선 벡터를 2배로 확대하는 선형변환 : $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$

$y=x$에 대하여 대칭이동시키는 선형변환 : $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, x축으로 직교사영(정사영)시키는 선형변환 : $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

그러므로 선형변환 $T : R^2 \to R^2$는 우선 벡터를 2배로 확대하고, $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 뒤에, x축으로 직교사영(정사영)시키는 변환은

$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}$이다. $\therefore [T] = \begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}$ ■

8. 만일 A가 4×7 크기의 행렬이라 하자. 이때 $\mathrm{rank}(A^T)+\mathrm{nullity}(A^T)$ 의 값은 무엇인가?

Sol) A의 크기가 4×7이라면, A^T의 크기는 7×4이다.

$\therefore\ \mathrm{rank}(A^T)+\mathrm{nullity}(A^T) = 4$ ■

9. 다음 R^4의 아래 부분집합은 직교집합이므로 일차독립이다, 이들을 정규직교화하여라.

$\{\mathrm{v}_1 = (1,\ -2,\ 1,\ -5),\ \mathrm{v}_2 = (2,\ 4,\ 16,\ 2),\ \mathrm{v}_3 = (4,\ -3,\ 0,\ 2)\}$

Ans $\mathrm{v}_1\cdot\mathrm{v}_2 = 0,\ \mathrm{v}_2\cdot\mathrm{v}_3 = 0,\ \mathrm{v}_3\cdot\mathrm{v}_1 = 0 \Rightarrow$ 직교집합이므로 일차독립이다.

$\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$의 정규직교기저집합을 $\{\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3\}$라 하면 $\{\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3\} = \left\{\frac{\mathrm{v}_1}{||\mathrm{v}_1||}, \frac{\mathrm{v}_2}{||\mathrm{v}_2||}, \frac{\mathrm{v}_3}{||\mathrm{v}_3||}\right\}$이다.

$||\mathrm{v}_1|| = \sqrt{31},\ ||\mathrm{v}_2|| = 2\sqrt{70},\ ||\mathrm{v}_3|| = \sqrt{29}$ 이므로

$\therefore \mathrm{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{31}}(1, -2,\ 1,\ -5)$, $\mathrm{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(1, 2,\ 8,\ 1)$, $\mathrm{z}_3 = \frac{1}{\sqrt{29}}(4, -3,\ 0,\ 2)$

■

10. $\mathrm{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$일 때 행렬 $U=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}i\\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5}i\end{bmatrix}$에 대하여 $\| U\mathrm{x} \|$ 는?

Ans $U^*U=I$ 이므로 $\| U\mathrm{x} \|^2 = < U\mathrm{x}, U\mathrm{x} >$

$= \mathrm{x}^* U^* U\mathrm{x} = \mathrm{x}^*\mathrm{x} = \| \mathrm{x} \|^2 = (\sqrt{|1|^2+|0|^2})^2 = 1.$



IV. (3점 x 7 = 21점) Explain or Fill the blank.

1. (Mid) 선형변환 $T : R^n \to R^m$에 대하여, $\mathrm{Im}\,T$는 R^m의 부분공간인 이유를 설명하여라.

(Pf) $\forall\, \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T,\ \exists\, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in R^n \ni T(\mathrm{v}_1)=\mathrm{w}_1,\ T(\mathrm{v}_2)=\mathrm{w}_2$

1) [(Show 덧셈에 대해 닫혀 있다) Show $\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T$]

$\Rightarrow \mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2 = T(\mathrm{v}_1)+T(\mathrm{v}_2)=T(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2)$ (1 pt)

$\Rightarrow \exists\, \mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2 \in R^n \ni T(\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2)=\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2 \in R^m$ (1 pt)

$\therefore\ \mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2 \in \mathrm{Im}\,T$

2) [(Show 스칼라곱에 대해 닫혀 있다) Show $k\mathrm{w}_1 \in \mathrm{Im}\,T$]

$\forall\, k \in R,\ k\mathrm{w}_1 = kT(\mathrm{v}_1)=T(k\mathrm{v}_1)$ (1 pt)

$\Rightarrow \exists\, k\mathrm{v}_1 \in R^n \ni T(k\mathrm{v}_1)=k\mathrm{w}_1 \in R^m$ (1 pt)

$\therefore\ k\mathrm{w}_1 \in \mathrm{Im}\,T$

$\therefore\ \mathrm{Im}(T)$는 R^m의 부분공간이다. (1 pt)



2. R^3의 순서기저 $\beta=\{(1,1,1),(1,-1,1),(1,2,2)\}$에 대하여 $\mathrm{y}=(6,11,9)$의 좌표벡터 $[\mathrm{y}]_\beta$는?

Ans $\mathrm{y} = c_1(1,1,1)+c_2(1,-1,1)+c_3(1,2,2)=(6,11,9)$, $(c_i \in R)$에서

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=6 \\ c_1-c_2+2c_3=11 \\ c_1+c_2+2c_3=9 \end{cases}$$ 이므로

=> $c_1 = 4, c_2 = -1, c_3 = 3$ 이다. $\therefore\ [\mathrm{y}]_\beta = (4,\ -1,\ 3)$ ■

3. $\alpha = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$, $\beta = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$가 R^2에서 기저라고 하고, $\mathrm{u}_1 = (1, 2), \mathrm{u}_2 = (2, 3), \mathrm{v}_1 = (1, 3), \mathrm{v}_2 = (1, 4)$일 때, 기저 α에 대해 $[\mathrm{w}]_\alpha = (1, 1)$일 때, $[I]_\alpha^\beta$를 이용하여 $[\mathrm{w}]_\beta = [I]_\alpha^\beta [\mathrm{w}]_\alpha$을 구하여라.

Ans $[\mathrm{w}]_\beta = [I]_\alpha^\beta [\mathrm{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$ ■

4. 선형변환 $T(x, y, z) = (z, y, x)$에 대하여 표준기저와 순서기저 $\epsilon = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$, $\alpha = \{(1,\ -1,\ 1),\ (1,\ -2,\ 1),\ (2,\ 1,\ -1)\}$로부터 구한 행렬 $[I]_\alpha^\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$와 $[I]_\epsilon^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$의 곱 $[I]_\alpha^\epsilon\ [I]_\epsilon^\alpha$은 무엇인가?

Ans $[I]_\alpha^\epsilon\ [I]_\epsilon^\alpha$ ■

5. 다음 행렬은 한 쌍의 복소수(켤레복소수) 고유값을 가진다. 이를 이용하여 $P^{-1}A\,P = D$를 만족하는 가역행렬 P와 행렬 D를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

Ans $|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 4 \\ -8 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$이므로 두 개의 서로 다른 고유값 $\lambda = 2 \pm 4i$을 가지므로, 대응하는 두 개의 일차독립인 고유벡터 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$를 갖는다. 따라서 $P = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이고 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 2+4i & 0 \\ 0 & 2-4i \end{bmatrix}$일 때 $P^{-1}A\,P = D$이다. ■

6. 당신이 만약 연구소에 취직하여 4차 행렬 $A=\begin{bmatrix}4&1&0&2\\0&-1&2&0\\0&0&1&0\\0&4&0&3\end{bmatrix}$의 **고유값, 고유벡터, 역행렬, rank, nullity, JCF**를 구하라는 요청을 팀장에게 받았다면 어떻게 구할지 Step별로 빈칸에 상세하게 서술하여라.

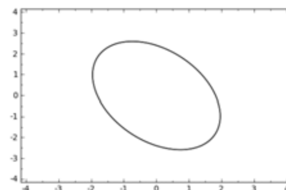
Ans

1) Step 1: (예) 인터넷에 접속하여 http://math1.skku.ac.kr 로 이동한다.
2) Step 2: ID= skku, PW = math를 입력하여 접속한다.
3) Step 3: "새 워크시트" 버튼을 누른다.
4) Step 4: 첫 번째 셀에 CDF 형식으로 행렬 A를 다음과 같이 정의한다.
   A=matrix(CDF,4,4,[4,1,0,2,0,-1,2,0,0,0,1,0,0,4,0,3])
5) Step 5: 두 번째 셀에 eigenvalues를 구하는 명령어 A.eigenvalues()를 입력하고, 실행한다.
6) Step 6: 세 번째 셀에 eigenvectors를 구하는 명령어 A.eigenvectors_right를 입력하고, 실행한다.
7) Step 7: 네 번째 셀에 역행렬을 구하는 명령어 A.inverse()를 입력하고, 실행한다.
8) Step 8: 다섯 번째 셀에 rank를 구하는 명령어 A.rank()를 입력하고, 실행한다.
9) Step 9: 여섯 번째 셀에 nullity를 구하는 명령어 A.right_nullity()를 입력하고, 실행한다.
10) Step 10: 열 번째 셀에 Jordan 표준형을 구하는 명령어 A.jordan_form()를 입력하고, 실행한다.

7. 방정식 $7x^2+4xy+4y^2-23=0$ 의 (x, −4, 4)와 (y, −4, 4) 사이에서의 그래프 개형을 Sage로 그려라.

Ans

```
# 위의 Step 1), 2), 3)에 이어,
var('x y')
f = 7*x^2 + 4*x*y + 4*y^2-23
implicit_plot(f, (x, -4, 4), (y, -4, 4))
```



($x'y'$−좌표축은 xy−좌표축을 시계방향으로 63.435° 만큼 회전한 축이고, **주어진 식은 새 좌표축에서는 아래 모양의 타원이다.**) ■





2010년 필즈상 수상자 세드릭 빌라니 교수(포앵까레 수학연구소장) http://www.bridges2014.or.kr/
ICM 2014 문화위원회 : http://matrix.skku.ac.kr/2014-Album/2014-ICM-Culture/

〔빅북〕 선형대수학

발행일 2014년 8월 31일
저작권자 빅북운동본부
대표자 조영복
작성자 이상구, 이재화, 김경원
주소 부산광역시 금정구 구서2동 248-10 현대빌딩 2F
문의처 051-510-2570 홈페이지 http://bigbook.or.kr/

발행처 교보문고 퍼플
출판등록 2012년 09월 07일 제3-2012-167호
주소 서울시 종로구 종로1가 1번지
대표전화 1544-1900
홈페이지 www.kyobobook.co.kr

편집디자인 좋은땅출판사
홈페이지 www.g-world.co.kr
대표전화 02-374-8616

ISBN 978-89-24-01524-9 (93410)